

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

● **Smith, Henry Bradford:** *Symbolic logic. Problem and method.* Ann Arbor (Michigan): Edwards Brothers, Inc. 1932. 31 S.

This is a systematic presentation of the author's scheme of symbolic logic; parts of it are practically verbatim reproductions of previous papers. That scheme is a generalization of the traditional logic, which may be characterized as follows: Let \mathfrak{A} be a Boolean Algebra, and let $|p|$ be a function defined for p in \mathfrak{A} . (In interpretation the elements of \mathfrak{A} are propositional functions or propositions, the latter regarded as a special case of the former; $|p|$ may be read " p is possible" and is still, in general, a propositional function). In this system \mathfrak{A} let implication (\supset) be defined by $p \supset q \equiv |pq'|$, (' indicating negation), and let the "existential" $|p|$ satisfy the postulates

$$(1) \quad |pq| = pq + p'q'|p||q| + |p||q'| + |p'|q|,$$

$$(2) \quad |p + q| = |p| + |q|; \quad (3) \quad p \supset |p|; \quad (4) \quad (p \supset q) \supset (|p| \supset |q|).$$

[No reason is given for the choice of the peculiar postulate (1). It is not wholly consistent with the above interpretation of $|p|$. If we interpret the assertion of an element of \mathfrak{A} to mean its truth for all values of the variables, and adopt the usual rules of inference, then we have a system \mathfrak{A}^* with an implication with most of the usual properties but not the property $p' + q \supset (p \supset q)$. [The author introduces \supset first, then defines $|p|$ as $(p \supset 0)'$. The above procedure is briefer but equivalent]. Next let \mathfrak{B} be the same or a second Boolean algebra, and let $<$ be the inclusion relation in \mathfrak{B} (or any relation having the same formal properties as $<$). Let the fundamental forms of the traditional logic, and two other forms U and V be defined by

$$A(a, b) \equiv (a < b) \ \& \ ((b < a) \vee ((a < b') \ \& \ (b' < a)))$$

$$E(a, b) \equiv A(a', b'); \quad O(a, b) \equiv \overline{A(a, b)}; \quad I(a, b) \equiv \overline{E(a, b)};$$

$$U(a, b) \equiv A(a', b); \quad V(a, b) \equiv \overline{U(a, b)}$$

(the Hilbert symbolism is here used to connect propositions). These definitions are so chosen that the traditional scheme of immediate inferences are valid without exception. Finally, let the system \mathfrak{A}^* be specialized to form a system \mathfrak{C} which is generated by the propositional functions A, E, I, O, U, V . This system \mathfrak{C} is the goal of the author's studies; the general result claimed by him is essentially the solution of the Entscheidungsproblem for \mathfrak{C} . His method is to give an elaborate classification into "chains", "cycles", "moods", "figures", etc. as in the traditional logic, by which the validity of any formula can be determined; in this process various additional postulates, some of complicated nature, are introduced. The work is a photo-lithoprint reproduction of the author's manuscript. It is apparently intended to be supplemented by lectures, since in the latter part a condensed notation is used, which the text does not fully explain. In the first part an application of the system \mathfrak{A}^* to the Epimenides paradox is given, in which it is claimed that the paradox disappears when account is taken of the fact that certain symbols are there ambiguously double-valued; but the treatment of these topics is not clear to the reviewer.

H. B. Curry (Pennsylvania).

Bahm, Archie J.: *Henry Bradford Smith on the equivalent form of Barbara.* *Monist* 42, 632—633 (1932).

Lewis, C. I.: *Alternative systems of logic.* *Monist* 42, 481—507 (1932).

Verf. behauptet die Existenz verschiedener Systeme der Logik (und zwar des Aussagenkalküls) nur in dem Sinn, daß man verschiedene logische Begriffe zugrunde legen

kann, von denen dann selbstverständlich auch verschiedene Sätze gelten. Das System der Grundbegriffe ist immer eine endliche Klasse K von Eigenschaften (Wahrheitswerten), so daß jedem Satz eine dieser Eigenschaften zukommt und daß es darunter eine (E) von der Art gibt, daß jeder Satz mit der Eigenschaft E behauptet werden kann. Die Sätze der Logik handeln von Aussagefunktionen $f(p_1 \dots p_n)$, deren Wahrheitswert nur von den Wahrheitswerten der Argumente p_i abhängt. Besteht z. B. K : 1. aus den beiden Eigenschaften „wahr“, „falsch“, so erhält man das System der Princ. Math., 2. aus den Eigenschaften „sicher“, „sicher falsch“, „zweifelhaft“, so erhält man das 3wertige System von Łukasiewicz, 3. aus den Eigenschaften „notwendig“, „unmöglich“, „wahr aber nicht notwendig“, „falsch aber nicht unmöglich“, so erhält man das Lewissche System of strict implication. Für die Aussagefunktionen der Systeme 2. und 3. werden Interpretationen gegeben, z. B. für $p \supset q$ im 3wertigen System die folgende: Bei Umwandlung einer Wette für p in eine Wette für q , erleidet man (abgesehen von Graden der Ungewißheit) keinen Nachteil. Die wahren Sätze eines Systems sind durch die Bedeutung der Grundbegriffe bestimmt und daher analytisch. Verschiedene Systeme (von denen es unendlich viele gibt) widersprechen einander nicht, und wenn man sich für eines entschließt (Verf. glaubt, daß eine solche Auswahl nötig ist, um Logik zu betreiben), so geschieht dies nach psychologischen und pragmatischen Gesichtspunkten. Gründe werden angeführt, warum vielleicht eine 3wertige Logik der 2wertigen vorzuziehen ist u. a. die Tatsache, daß Aussagefunktionen für gewisse Argumente weder wahr noch falsch, sondern sinnlos werden. *K. Gödel.*

Wajsberg, M.: Ein neues Axiom des Aussagenkalküls in der Symbolik von Sheffer. Mh. Math. Phys. 39, 259—262 (1932).

Als einziges Axiom des Aussagenkalküls genügt nach Nicod, wenn außer der Einsetzung das Schlußschema „Wenn p und $DpDqr$, so r “ zugelassen wird (*Dab* steht hier für das Sheffersche Symbol $a | b$), die Formel $DDpDqrDDtDttDDsqDDpsDps$. Das Auftreten des identisch wahren Bestandteils $DtDtt$ stellt einen „Schönheitsfehler“ dar, welcher dem neuen von Wajsberg angegebenen Axiom

$$DDpDqrDDDsrrDDpsDpsDpDpq$$

nicht anhaftet; auch treten nur 4 verschiedene Variablen in der letzten Formel auf, aus welcher das Nicodsche Axiom hergeleitet wird. Von Łukasiewicz stammt die Angabe eines weiteren „einzigsten“ Axioms des Aussagenkalküls, welches aus dem Nicodischen bei Ersetzung des Bestandteils $DtDtt$ durch $DpDrp$ entsteht. — Für die Bereiche der wahren Formeln, die als einzige Verknüpfung die Implikation bzw. die Äquivalenz haben, werden Axiomensysteme mitgeteilt, die der Verf. 1925/1926 aufstellte, aber bislang nicht veröffentlicht hatte. (Die ersten derartigen Axiomensysteme wurden von Tarski und Lesniewski aufgestellt.) *Arnold Schmidt* (Göttingen).

Foradori, Ernst: Grundbegriffe einer allgemeinen Teiltheorie. (Zur Grundlegung einer allgemeinen Teiltheorie. I.) Mh. Math. Phys. 39, 439—454 (1932).

Diejenigen Eigenschaften der in der Mathematik vorkommenden Teilrelationen, die aus der bloßen Forderung von Reflexivität und Transitivität folgen, werden abgegrenzt. (Dabei werden als Elementenbereiche auch solche zugelassen, die — wie derjenige der Ordnungszahlen — keine Mengen sind.) Es werden insbesondere die durch Durchschnitt (\cdot), Vereinigung ($+$) und Komplementärteil (im Falle seiner Existenz) geltenden Rechengesetze hergeleitet, und es wird gezeigt, daß hingegen andere grundlegende Eigenschaften — wie das distributive Gesetz „ $a(b + c)$ enthalten in $a b + a c$ “ — nicht erfüllt zu sein brauchen. Die Arbeit ist als Grundlage für einige weitere gedacht, die von dem hier dargelegten Standpunkt aus die Stetigkeit und das Aktual-Unendlichkleine behandeln sollen. *Arnold Schmidt* (Göttingen).

Gentzen, Gerhard: Über die Existenz unabhängiger Axiomensysteme zu unendlichen Satzsystemen. Math. Ann. 107, 329—350 (1932).

In verschiedenen Arbeiten von P. Hertz (Math. Ann. 87, 89, 101; Ann. der Philos. 7) werden Systeme von Sätzen der Form $u_1 \dots u_r \rightarrow v$ betrachtet; die zu-

gelassenen Schlußregeln lauten (in Gentzenscher Terminologie): 1. Verdünnung: „wenn $u_1 \dots u_v \rightarrow v$, so auch $t_1 \dots t_\mu u_1 \dots u_v \rightarrow v$ “ (wo die t zu dem zugrunde liegenden Elementenbereich gehören), und 2. Schnitt: „wenn $u_1 \dots u_v \rightarrow v$ und $t_1 \dots t_\mu v \rightarrow w$, so auch $t_1 \dots t_\mu u_1 \dots u_v \rightarrow w$ “. Hertz bemerkte, daß das „Streichverfahren“, welches zu jedem endlichen, in bezug auf die beiden Schlußregeln abgeschlossenen System ein unabhängiges Axiomensystem liefert, bei gewissen unendlichen abgeschlossenen Satzsystemen versagt; er warf die Frage auf, ob denn überhaupt jedes unendliche abgeschlossene Satzsystem ein unabhängiges Axiomensystem besitze, und er wies nach, daß diese Behauptung sich jedenfalls nicht auf Satzsysteme, die nur in bezug auf Schnitte abgeschlossen sind, verallgemeinern läßt. (Bei Hertz erscheint die Fragestellung übrigens in inhaltlich etwas anderer Wendung etwa so: Gibt es zu einem beliebigen gegebenen Satzsystem stets ein unabhängiges Axiomensystem wenigstens dann, wenn man in einem solchen abundante Prämissen zuläßt?) — Der Verf. zeigt, daß das — in bezug auf beide Schlußregeln abgeschlossene — Satzsystem, welches (bei Zugrundelegung der Elemente b, c, a_1, a_2, \dots) aus den Sätzen $a, b \rightarrow c$ [$v = 1, 2, \dots$], $a_\lambda \rightarrow a_\mu$ [$\lambda < \mu$] und aus den „Verdünnten“ dieser Sätze besteht, kein unabhängiges Axiomensystem besitzt. Dagegen läßt sich zu jedem abzählbar unendlichen abgeschlossenen Satzsystem, das nur aus Sätzen der Form $u \rightarrow v$ (mit einem Vorderglied) und ihren Verdünnten besteht, ein unabhängiges Axiomensystem ermitteln.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Finsler, P.: Die Existenz der Zahlenreihe und des Kontinuums. Comment. math. helv. 5, 88—94 (1933).

Der am Schluß der Finslerschen Arbeit „Über die Grundlegung der Mengenlehre, 1. Teil“ (Math. Z. 25, 683), angekündigte Existenzbeweis für die Zahlenreihe von dem in dieser Arbeit eingenommenen Standpunkt aus wird hier gegeben. (Die von verschiedenen Seiten gegen die „Grundlegung...“ erhobenen Einwände hält der Verf. für nicht stichhaltig). — Einleitend wird die Notwendigkeit eines solchen mengentheoretischen Beweises damit begründet, daß man weder von der genetischen Definition der Zahlen noch von den Peanoschen Axiomen her die Existenz der Zahlenreihe beweisen könne, da man nicht voraussetzen dürfe, daß es zu jeder Zahl — bzw. zu jedem Beweisschritt — eine(n) folgende(n) gebe. — Der Finslersche Beweis geht aus von dem Durchschnitt \mathfrak{Z} aller Systeme, die die Nullmenge und mit M stets auch $\{M\}$ enthalten, sofern $\{M\}$ existiert. Das Induktionsprinzip wird als für \mathfrak{Z} gültig nachgewiesen und auf den Finslerschen Begriff „zirkelfrei“ angewandt, wodurch sich ergibt, daß zu M stets auch $\{M\}$ existiert. Nun folgt unmittelbar die Gültigkeit aller Peanoschen Axiome für \mathfrak{Z} . Auf Grund zweier Sätze der „Grundlegung...“, die aus gewissen Zirkelfreiheitsvoraussetzungen auf Existenz schließen, ergibt sich ebenso unmittelbar die im Titel aufgeführte Behauptung. Den Schluß bilden einige Andeutungen betreffs der Unvermeidbarkeit des — seinerseits nicht ohne Zirkel definierbaren — Begriffs „zirkelfrei“.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Gonseth, F.: Sur l'axiomatique de la théorie des ensembles et sur la logique des relations. Comment. math. helv. 5, 108—136 (1933).

Kritische Betrachtungen über die üblichen Begründungen der Logik und Mengenlehre sowie über die Antinomien. Aufbau von Logik und Mengenlehre (unformalistisch) ausgehend von Begriffen wie Objekt, Verknüpfung, Relation, logische Struktur, durch Angabe von zulässigen Operationen (principes) und Verboten [= Unverträglichkeitsforderungen (axiomes)], das letzte ähnlich wie M. Geiger: Systematische Axiomatik der euklidischen Geometrie.

Reinhold Baer (Halle a. S.).

Birkhoff, George D.: Note on a preceding paper. Ann. of Math., II. s. 33, 788 (1932).

Korrektur eines Beweises aus „A set of postulates for plane geometry, based on scale and protector“ (Ann. of Math., II. s. 33; dies. Zbl. 4, 126).

Arnold Schmidt.

Joseph, H. W. B.: A defence of free thinking in logistics. Mind 41, 424—440 (1932).

Algebra und Zahlentheorie.

Carmichael, R. D.: Note on triple systems. Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 695—696 (1932).

L'auteur indique que le théorème de Skolem sur l'existence d'un système de triples de Steiner avec la propriété E , pour les nombres de la forme $2^{k+1}-1$, est un cas spécial du théorème d'existence des géométries finies au sens de Veblen et Bussey, que le groupe appartenant au système de triples est le groupe de collinéation de la géométrie correspondante $PG(k, 2)$, et que la connexion entre ce système de triples et les groupes abéliens d'ordre 2^k et du type $(1, 1, \dots, 1)$ est un cas spécial d'un résultat général établi par lui.

S. Bays (Fribourg).

Liebitzky, E.: Anwendung der Ausgleichsrechnung auf die Herleitung eines Satzes der Determinantenrechnung. Z. Vermessgswes. **61**, 710—711 (1932).

Sorrentino, Angela: Sul calcolo di certi determinanti e su certe forme quadratiche. Atti Accad. Gioenia Catania **19**, mem. 5, 1—8 (1932).

Angeregt durch eine Arbeit von Tricomi über partielle Differentialgleichungen wird eine Determinante ausgewertet. Offenbar wurde übersehen, daß diese Determinante schon von Cauchy berechnet und seither mehrfach angewandt wurde. (Vgl. z. B. Math. Ann. **77**, 485.)

Otto Szász (Frankfurt a. Main).

Kravčuk, M.: Sur une généralisation de l'inégalité de J. Hadamard. Acad. Sci. Ukraine, Bull. Nr 1, 90—95 u. franz. Zusammenfassung 95 (1931) [Ukrainisch].

Soit

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

une forme quadratique positive, et soit A_h l'un des déterminants

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_h} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \dots & a_{i_2 i_h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_h i_1} & a_{i_h i_2} & \dots & a_{i_h i_h} \end{vmatrix}. \quad (i_k \neq i_l \text{ lorsque } k \neq l)$$

L'A. généralise l'inégalité $A_n \leq a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ de M. Hadamard comme il suit:

$$\prod A_h^{\binom{n-h-1}{k}} \cdot A_n^{\binom{n-h-1}{k-1} \binom{n}{k}} \leq \prod A_{h-k}^{\binom{h+k}{k}}.$$

V. Glivenko (Moscou).

Juringius, Nils: Recherches sur les fonctions symétriques. Stockholm: Diss. 1932. 80 S.

Die Schrift enthält hauptsächlich vergleichende Betrachtungen über alte und neue Methoden zur Berechnung von symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung mit unbestimmten Koeffizienten oder allgemeiner der Lösungen eines Systems von m Gleichungen in m Unbekannten mit unbestimmten Koeffizienten. Neu scheint eine Methode zu sein, die auf einer Anwendung der Lagrangeschen Reihe beruht: die Wurzeln der Gleichung $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ werden bei festem $a_n \neq 0$ als Funktionen von a_1, \dots, a_{n-1} betrachtet und in Potenzreihen nach diesen entwickelt; für die symmetrischen Funktionen erhält man so auch Potenzreihen, die natürlich abbrechen müssen. In einem Anhang wird die Lagrangesche Reihe auf Gleichungssysteme (genauer auf die Umkehrung eines Systems von m Potenzreihen in m Veränderlichen) ausgedehnt.

van der Waerden (Leipzig).

Simmons, H. A.: Classes of maximum numbers and minimum numbers that are associated with certain symmetric equations in n reciprocals. Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 876—907 (1932).

Verf. betrachtet zunächst die positiven Lösungen der Gleichung $Q\left(\frac{1}{x}\right) = c$, wobei $Q\left(\frac{1}{x}\right) \equiv Q\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)$ ein Polynom bezeichnet, das in den n Variablen $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$ symmetrisch ist und Koeffizienten besitzt, die ≥ 0 sind; es sei $Q(0, 0, \dots, 0) = 0$.

Sind sämtliche x einander gleich, so besitzt die obige Gleichung eine und nur eine positive Wurzel W . Bedeutet $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv P(x)$ ein Polynom, das in den n Variablen symmetrisch ist und deren Koeffizienten ≥ 0 sind, und ist $P(x)$ keine Konstante, so zeigt Verf., daß jede positive Lösung x der Gleichung $Q\left(\frac{1}{x}\right) = c$ der Bedingung $P(x) > P(W)$ genügt. Unter einer E -Lösung der vorigen Gleichung wird eine solche Lösung verstanden, bei der x_1, x_2, \dots, x_{n-1} positive ganze Zahlen sind und außerdem $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ gilt. Von diesen E -Lösungen wird gezeigt, daß sie bei jeder Gleichung der Form $Q\left(\frac{1}{x}\right) = c$ beschränkt sind. Wird nun unter Q speziell die r -te elementarsymmetrische Funktion der n Variablen verstanden, so gilt folgender Satz: Ist $x \neq w$ irgendeine E -Lösung der Gleichung $Q\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{b}{(c+1)b-1}$, wobei b und c irgendwelche positiven Konstanten sind und w die durch den Kelloggschen Minimalprozeß gewonnene E -Lösung der obigen Gleichung bedeutet, so ist stets $P(x) < P(w)$, wobei P dieselbe Bedeutung hat wie früher. — w ist damit also Maximalzahl, während bei dem allgemeinen Typ von Gleichungen die symmetrische Lösung W als Minimalösung angesehen werden kann. Verf. leitet noch weitere Eigenschaften über die Lösungen der genannten Gleichungen ab und wendet sie auf Probleme der Algebra und Zahlentheorie an.

Wegner (Darmstadt).

Carlitz, Leonard: On arrays of numbers. Amer. J. Math. **54**, 739–752 (1932).

This investigation is concerned with arrays of numbers $a_{n,s}$ defined by a relation of the type

$$a_{n+1,s} = \sum_{i=0}^m \beta_i(s,n) a_{n,s-m+i}$$

together with a set of initial conditions such as $a_{1,1} = 1$, $a_{1,s} = 0$ for $s \neq 1$. Here m is independent of both s and n . Thus, for example, for $m = 1$, $\beta_0 \equiv \beta_1 \equiv 1$, we have the Pascal triangle (array of combinatorial coefficients); for $m = 1$, $\beta_0 \equiv 1$, $\beta_1 \equiv s$, we have the array of Stirling numbers. The investigation is carried out by means of the symbolic operator F , $F \equiv \beta_0 E^m + \beta_1 E^{m-1} + \dots + \beta_m$, where E is defined by the identity $Ef(s) = f(s-1)$. The interest is in finding explicit expressions for the elements of the named general array. These expressions take fairly simple forms when the operator F satisfies certain specified conditions. Some of the results are applied in the evaluation of certain finite sums. One of these sums leads to a connection between particular arrays and Bernoulli polynomials in several variables.

R. D. Carmichael (Urbana).

Abason, Ernest: Sur la moyenne des polynômes du troisième degré. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **3**, 98–101 (1932).

Marty, F.: Sur une inégalité que vérifient les zéros d'un polynôme. Bull. Sci. math., II. s. **56**, 276–281 (1932).

P. Montel [C. R. Acad. Sci., Paris **193**, 974–976 (1931), this. Zbl. **3**, 157 (1932)] has proved that if L is the length of the polygonal line joining the points $z = 1, a_1, a_2, \dots, a_n, 0$, taken in this order, and if $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ has a zero z_1 with $|z_1| = \varrho_1 > 1$, then $L > \varrho_1$. The author proves that if there are k zeros z_1, z_2, \dots, z_k such that $|z_v| = \varrho_v \geq [\sqrt[k]{2} - 1]^{-1}$, then $L > 2\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_k - 1$. This inequality is the best possible in a certain sense. Other inequalities of a similar nature complete the note.

Hille (Princeton, N. J.).

Amato, Vincenzo: Sulla distribuzione, secondo la specie, delle sostituzioni del gruppo totale nei sottogruppi fondamentali. Atti Accad. Gioenia Catania **19**, mem. 8, 1–10 (1932).

Continuando lo studio della distribuzione delle sostituzioni del gruppo totale G , sopra n elementi, nei „sottogruppi fondamentali“, cioè nei sottogruppi ciascuno dei quali è costituito da tutte le sostituzioni di G commutabili con una data [Note Esercit. Mat. **6**, 30–42, 75–81 (1931); questo Zbl. **4**, 51], l'Autore dà un'espressione del nu-

mero dei sottogruppi fondamentali distinti di G , traendo profitto delle nozioni, già da lui introdotte, di „altezza di una sostituzione“ e di „specie di un sottogruppo fondamentale“.

M. Cipolla (Palermo).

Rohrbach, Hans: Die Charaktere der binären Kongruenzgruppen mod p^2 . Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin 1, 33–94 (1932).

Die zweireihigen quadratischen Matrizen mit ganzzahligen Koeffizienten und der Determinante eins, beides mod p^2 , bilden eine Gruppe \mathfrak{G} der Ordnung $p^4(p^2 - 1)$, für die die Charaktere der irreduziblen Darstellungen explizit angegeben werden. \mathfrak{G} besitzt $p^2 + 4p + 4$ Klassen ähnlicher Elemente; als Charaktere ergeben sich zunächst die schon durch I. Schur bekannten $p + 4$ Charaktere der Gruppe \mathfrak{H} der binären unimodularen Substitutionen mod p , denn es ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}/\mathfrak{K}$, wobei \mathfrak{K} eine invariante Abelsche Untergruppe der Ordnung p^3 ist. Außerdem gibt es noch $\frac{(p-1)^2}{2}$ bzw. $4p$ bzw. $\frac{p^2-1}{2}$ Charaktere der Grade $p(p+1)$ bzw. $\frac{p^2-1}{2}$ bzw. $p(p-1)$. Die Untersuchung wird für $p = 2$ gesondert geführt; für ungerades p werden zunächst geeignete Repräsentanten für die Klassen von \mathfrak{G} gegeben (unter Benutzung einer algebraischen Erweiterung des Rings der ganzen Zahlen mod p^2), wobei die Klassen, die nach \mathfrak{K} fallen, besonders behandelt werden müssen. Hierauf wird wiederholt eine „Methode des Aufsteigens“ von Frobenius (S.-B. Berlin. math. Ges. 1898, 502: Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen) angewandt, welche Charaktere von — nicht notwendig irreduziblen — Darstellungen einer Gruppe aus Charakteren einer Untergruppe zu berechnen gestattet; mit ihrer Hilfe werden aus Charakteren verschiedener Untergruppen von \mathfrak{G} , insbesondere aus solchen einer Sylowgruppe \mathfrak{S} der Ordnung p^4 (für die alle einfachen Charaktere berechnet werden) und aus linearen Charakteren anderer Untergruppen die einfachen Charaktere von \mathfrak{G} berechnet; besondere Schwierigkeiten entstehen im Falle der Charaktere vom Grade $p(p-1)$, die man hierbei nicht direkt, sondern erst nach „Aufspaltung“ der zunächst berechneten, zusammengesetzten Charaktere von \mathfrak{G} erhält. Die bei den Charakteren

vom Grade $\frac{p^2-1}{2}$ auftretenden Summen $\sum_k \omega^{uk + \frac{v}{k}}$; $\omega^p = 1$, $\omega \neq 1$, u, v : ganz rational, k durchläuft alle quadratischen Reste bzw. Nichtreste mod p , — hängen mit den Kloostermanschen Summen zusammen; ihre Grade als algebraische Zahlen werden bestimmt. — Der Fall $p = 2$ wird gesondert mit denselben Methoden erledigt. — Die Untersuchung ist für ein Problem von E. Hecke von Bedeutung, nämlich für die Transformation der Integrale erster Gattung des zu einer Kongruenzuntergruppe der Modulgruppe gehörigen algebraischen Gebildes bei Substitutionen der vollen Modulgruppe [Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 6, 235–257 (1928) u. 8, 271–281 (1930)].

Magnus (Frankfurt a. M.).

Albert, A. A.: A note on normal division algebras of order sixteen. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 703–706 (1932).

Während jede Divisionsalgebra über einem endlichen algebraischen Zahlkörper zyklisch ist, d. h. einen zyklischen kommutativen Unterkörper enthält, aus dem sie in bestimmter Weise erzeugt wird, ist dies bei beliebigem Grundkörper K der Charakteristik Null bekanntlich nicht mehr der Fall. Doch enthalten alle Divisionsalgebren der Ordnung 16 über K einen Galoisschen Unterkörper 4. Grades mit der Gruppe $G_4 = (E, S_1, S_2, S_3)$, $S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = E$, $S_1 S_2 = S_3$. Für diesen vom Verf. erstmalig in den Trans. Amer. Math. Soc. 31, 253–260 (1929) mitgeteilten Satz wird hier ein neuer, einfacherer Beweis gegeben.

Grell (Jena).

Berwick, W. E. H.: Algebraic number-fields with two independent units. Proc. London Math. Soc., II. s. 34, 360–378 (1932).

The writer gives a method of determining explicitly a pair of fundamental units in a real cubic field, which is said to be shorter than that due to Voronoi [A Gene-

ralization of the Algorithm of Continued Fractions (in Russian), Warsaw, 1896.] He then shows that a modification of his method is effective for any field in which the number of units in a fundamental system is two. Such a field is necessarily of degree ≤ 6 . About fifty numerical examples are given. *Latimer* (Lexington).

Zahlentheorie:

Davenport, H.: On a generalization of Euler's function $\varphi(n)$. J. London Math. Soc. 7, 290—296 (1932).

Bezeichnungen: Die n und d natürliche Zahlen, p Primzahlen; $B_r (r \geq 1)$ die Bernoullischen Zahlen $-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, \dots$; C die Eulersche Konstante, α eine beliebige reelle Zahl; $\mu(n)$ die Möbiussche, $\varphi(n)$ die Eulersche Funktion; $\zeta(\alpha)$ die Riemannsche Zetafunktion;

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(n) &= \sum_{\substack{m=1 \\ (m,n)=1}}^n m^\alpha \quad (\text{also } \varphi_0(n) = \varphi(n)); \\ S_\alpha(n) &= 1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha; \\ \omega(n) &= - \sum_{d|n} \mu(d) \frac{\log d}{d}, \quad w(n) = \sum_{p|n} \frac{\log p}{p-1}.\end{aligned}$$

Hauptformeln: Eine Möbiussche Umkehrformel liefert

$$\varphi_\alpha(n) = n^\alpha \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) S_\alpha(d) d^{-\alpha}.$$

Hierin läßt sich $S_\alpha(d)$ mit der Eulerschen Summenformel abschätzen, für natürliches α sogar in geschlossener Form ausdrücken. Es entstehen so die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}(1) \quad \varphi_\alpha(n) &= \frac{n^\alpha \varphi(n)}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1} \sum_{r=1}^{\alpha-1} \binom{\alpha+1}{r+1} B_{r+1} n^{\alpha-r} \prod_{p|n} (1-p^r) \quad (\alpha=1, 2, 3, \dots; n>1), \\ (2) \quad \varphi_\alpha(n) &= \frac{n^\alpha \varphi(n)}{\alpha+1} + O(n^\alpha) \quad (\alpha \geq 0), \\ (3) \quad \varphi_\alpha(n) &= \frac{n^\alpha \varphi(n)}{\alpha+1} + \zeta(-\alpha) \prod_{p|n} (1-p^\alpha) + O(n^\alpha) \quad (\alpha < 0, \alpha \neq -1), \\ (4) \quad \varphi_{-1}(n) &= \frac{\varphi(n)}{n} (\log n + C) + \omega(n) + O\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Sodann zeigt Verf., daß $w(n) = \frac{n \omega(n)}{\varphi(n)}$ ist und bestimmt die Maximalordnung sowie die Minimalordnung von $\omega(n)$ und $w(n)$:

$$(5_1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \omega(n)}{\log n} = 1, \quad (5_2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n w(n)}{\log n} = 1,$$

$$(6_1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega(n)}{\log \log n} = \frac{1}{4}, \quad (6_2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w(n)}{\log \log n} = 1.$$

(5₁) und (5₂) sind leicht einzusehen (man setze $n = p$); (6₁) und die viel leichter beweisbare (6₂) werden mit elementarer Primzahltheorie erledigt (die Anwendung des Primzahlsatzes ist zwar bequem, aber beidemale leicht vermeidbar). *A. Walfisz* (Radość).

Lehmer, D. H.: On Euler's totient function. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 745—751 (1932).

Der Verf. beweist: I. Eine ganze Zahl n , die der Gleichung $k\varphi(n) = n - 1$ (k ganz und $\varphi(n)$ = die Anzahl der Zahlen $< n$ und prim zu n) genügt, ist entweder eine Primzahl oder das Produkt von wenigstens 7 Primzahlen; und II: Es gibt 8 Zahlen n , die der Gleichung $k\varphi(n) = n + 1$ genügen, wenn n weniger als 7 verschiedene Primfaktoren hat. Die Beweise sind elementar. *N. G. W. H. Beeger* (Amsterdam).

Lehmer, D. H.: An inversive algorithm. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 693—694 (1932).

Der Verf. beweist, daß der Viggo Brunsche Algorithmus (dies. Zbl. 3, 149) zur Berechnung der n -ten Primzahl nicht nur für die Reihe der Primzahlen gilt, sondern

auch für jede Folge von natürlichen Zahlen (dies. Zbl. 5, 52). Man kann weiter aus den Gleichungen $n_i = n - \theta(n_0 + n_1 + \dots + n_{i-1})$, $i = 0, 1, \dots, r$, durch Elimination von n_1, n_2, \dots, n_{r-1} einen, im allgemeinen komplizierten, Ausdruck für n_r erhalten, der in besonderen Fällen vereinfacht werden kann: z. B. für die Reihe der geraden Zahlen; dann ist $\theta(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$, und man erhält die Identität

$$n = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{8} \right\rfloor + \dots \quad \text{Beeger (Amsterdam).}$$

Ricci, Giovanni: Sui grandi divisori primi delle coppie di interi in posti corrispondenti di due progressioni aritmetiche. Applicazione del metodo di Brun. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 11, 91–110 (1932).

The method employed by Brun in proving that if the number of prime-twins (pairs of primes differing by 2, as 3 and 5, 5 and 7, etc.) is infinite then the series of the reciprocals of the primes involved is convergent and the method used by Landau in the exposition in his Handbuch . . . der Primzahlen are here utilized in establishing a more general theorem concerning corresponding primes in two arithmetic progressions. Let a, b and a', b' be two pairs of relatively prime integers with a and a' positive and suppose that $|a - a'| + |b - b'| > 0$. Then Ricci proves two general theorems (not capable of brief statement without explanatory details) of which the following are special cases. If $P^*(\xi)$ denotes the number of positive integers $n' \leq \xi$ for which the two integers $p = an' + b$ and $p' = a'n' + b'$ are both primes, then, if $\xi \geq 3$ and ω is a suitable constant (independent of ξ), we have

$$P^*(\xi) < \omega \frac{\xi}{\log^2 \xi} (\log \log \xi)^2.$$

If there are infinitely many positive integers n' such that the integers $p = an' + b$ and $p' = a'n' + b'$ are both primes, then the series

$$\sum_{p, p'} \left(\frac{\log^{1-\varepsilon} p}{p} + \frac{\log^{1-\varepsilon} p'}{p'} \right)$$

is convergent, ε being any positive number whatever. The special case in which $a = a' = 1, b = 0, \varepsilon = 1$ includes the named theorem of Brun. *R. D. Carmichael*.

Vandiver, H. S.: Note on the divisors of the numerators of Bernoulli's numbers. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18, 594–597 (1932).

Consider the Bernoulli numbers as rational fractions in their lowest terms with $B_1 = \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, \dots$. Let l be a prime greater than 3 and write $v = \frac{1}{2}(l-3)$. If l does not divide the numerator of any one of the numbers B_1, B_2, \dots, B_v then l is said to be regular, otherwise, irregular. If the numerator of B_i is divisible by a prime p and p is prime to i , then p is said to be a proper divisor of this numerator; otherwise it is an improper divisor. The following theorem is stated: A regular prime never appears as a proper divisor of the numerator of any Bernoulli number. An irregular prime appears as a proper divisor of the numerators of an infinity of Bernoulli numbers. There is an infinity of irregular primes of the form $4k+3$ (due to Jensen). Contrary to the situation in connection with the divisors of the denominators of the Bernoulli numbers, a numerator of a Bernoulli number may be divisible by the square of a proper divisor. None of the primes < 307 ever appears as a proper divisor of a numerator of a Bernoulli number except those in the set 37, 59, 67, 101, 103, 131, 149, 157, 233, 257, 263, 271, 283, 293.—By aid of the class number of a cyclotomic field a limitation is found on the divisibility of the numerators of certain Bernoulli numbers by powers of l . *R. D. Carmichael* (Urbana).

Tegnér, Hugo: Von dem Sylvesterschen Denumeranten. Ark. Mat. Astron. Fys. 23 A, Nr 7, 1–58 (1932).

The object of this memoir is to study the number of solutions in non-negative integers of the diophantine equation

$$s = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \quad (1)$$

where the integers s, a_1, a_2, \dots, a_n are given, subject to the inequalities, $s \geq 0, a_i > 0$. This number of solutions is called the denumerant of 1) by Sylvester, who obtained for it an expression of the type $\sum_k w_k$ where each "wave" w_k is a rather complicated

sum involving roots of unity. The present paper derives expressions for w_k as polynomials in s , in a purely arithmetical way by applying the theory of numerical functions of two variables. Extensive use is made of the "isolating factor" $\delta_\sigma^{(k)}$ which has the value 1 or 0 according as σ is or is not divisible by k . Application is also made of Nörlund's generalization of the Bernoulli polynomial, namely, the coefficient of $t^m/m!$ in the power series expansion for

$$\prod_{i=1}^n \frac{t a_i}{e^{t a_i} - 1},$$

a_i being the coefficients of 1). To illustrate the method, actual expressions for the denumerants of

$$s = 10x_1 + 15x_2 + 30x_3,$$

$$s = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6,$$

$$s = 24x_1 + 25x_2 + 30x_3 + 36x_4$$

are obtained as functions of s . The final expression for the general denumerant is too complicated to be given here.

D. H. Lehmer (Berkeley).

Hull, Ralph: The numbers of solutions of congruences involving only k th powers. Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 908–937 (1932).

The problem of determining the number of solutions of the congruence

$$x_1^k + x_2^k + \dots + x_s^k \equiv a \pmod{p}, \quad k \geq 1, s \geq 1, p \text{ a prime}, \quad (1)$$

is connected both with Waring's problem and with the problem of finding resolvent equations for the cyclotomic equation

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = 0, \quad p \text{ an odd prime}. \quad (2)$$

The purpose of the paper is to obtain general formulas for the number of solutions of (1) which cover all cases and at the same time to obtain certain results for more general congruences of the type

$$a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \dots + a_s x_s^k \equiv a \pmod{n}, \quad s \geq 1, k \geq 1, \quad (3)$$

where a_1, a_2, \dots, a_s, a and n are any integers. By the number of solutions of (3) is meant the number of sets of integers x_1, \dots, x_s satisfying (3) and such that $0 \leq x_v < n$, $v = 1, 2, \dots, s$. The methods employed are similar to those of Lebesgue (but with important modifications and extensions) in his discussion of congruences of the type

$$a_1 x_1^m + a_2 x_2^m + \dots + a_s x_s^m \equiv a \pmod{p}, \quad m \geq 2, \quad (4)$$

where p is an odd prime of the form $p = hm + 1$. Recursion formulas are obtained for the number of solutions of (4) with $a_v = 1$ ($v = 1, 2, \dots, s$). For $m = 2$ the formulas are implied in results due to Jordan. The cases $m = 2$ and $m = 3$ have been successfully treated by Lebesgue. For $m \geq 3$ Hull's formulas depend upon certain integers for the determination of which a general method is given. Thus for $m = 5$ these integers are expressed in terms of an integral solution of the system $x^2 + 25y^2 + 25z^2 + 125w^2 = 16p$, $y^2 + yz - z^2 = xw$ of two Diophantine equations, this system having exactly eight distinct integral solutions all of which are simply expressible in terms of one of them.

R. D. Carmichael (Urbana).

Lehmer, D. H.: A note on Fermat's last theorem. Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 723–724 (1932).

Vandiver (1925) u. Morishima (1932) haben mit Ausnahme der in 75571·20579903 aufgehenden Primzahlen bewiesen: „Wenn die Gleichung $x^p + y^p + z^p = 0$ eine Lösung hat, bei der xyz zu p teilerfremd ist, so ist der erste Faktor der Klassenanzahl des Kreisteilungskörpers $K(e^{2\pi i/p})$ durch p^{12} teilbar.“ Verf. zeigt, daß 75571 und 20579903 Primzahlen sind und daß der Satz auch für diese richtig ist. *Bessel-Hagen (Bonn).*

Jarník, Vojtěch: Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre. *Mém. Soc. Roy. sci. Bohême* 1931, Nr 20, 1—17 (1932).

Bezeichnungen und Annahmen: $x > 0$; $r \geq 4$ ganz; $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_r > 0$; nicht alle $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \dots, \frac{\alpha_r}{\alpha_1}$ rational;

$D = \alpha_1 \dots \alpha_r$; $A = \text{Max} \left(\frac{2\pi}{\alpha_1}, \dots, \frac{2\pi}{\alpha_r} \right)$; $Q = Q(k_1, \dots, k_r) = \alpha_1 k_1^2 + \dots + \alpha_r k_r^2$;

$$P(x) = \sum_{Q \leq x} 1 - \frac{\pi^{r/2} x^{r/2}}{\sqrt{D} \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)}$$

(Gitterrest des r -dimensionalen „irrationalen“ Ellipsoides $Q \leq x$);

$$J(x) = \int_0^x P^2(y) dy, \quad R(x) = \frac{1}{x} \int_0^x |P(y)| dy, \quad T(x) = \left(\frac{1}{x} J(x) \right)^{1/2};$$

$$F(z) = \sum_{k_1, \dots, k_r = -\infty}^{\infty} e^{-Qz} \text{ für } \Re(z) > 0; \quad \varphi(x) > 0, \quad \varphi(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty.$$

Mit Mw. und E II meine ich die folgenden Arbeiten des Verf.: „Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre“, *Math. Z.* 33, 62—84 (1931) [s. dies. Zbl. 1, 130—131 (1931)], und „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. II.“, *Math. Ann.* 101 (1929); mit J. W. unsere gemeinsame Arbeit „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden“, *Math. Z.* 32 (1930). Hauptsätze: Den Hauptteil der Arbeit nimmt der Beweis von

$$(1) \quad J(x) = o(x^3) \text{ für } r = 4$$

ein. Hierzu wird der Spezialfall $r = 4$ des in Mw. für O -Zwecke benutzten Doppelintegrals

$$J(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\frac{1}{x} - i\infty}^{\frac{1}{x} + i\infty} \int_{\frac{1}{x} - i\infty}^{\frac{1}{x} + i\infty} \left(F(s) - \frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{D} s^{r/2}} \right) \left(F(s') - \frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{D} s'^{r/2}} \right) \frac{e^{x(s+s')} - 1}{s s' (s+s')} ds ds'$$

angewandt. Es kommt nur das Teilintegral $J_1(x)$ von $J(x)$ mit $\Im(s) \geq \frac{A}{\sqrt{x}}$, $\Im(s') \geq \frac{A}{\sqrt{x}}$ in Betracht, da die Restintegrale bereits in Mw. (dort durften die α beliebige positive Zahlen sein) hinreichend genau abgeschätzt waren. Bei der Behandlung von $J_1(x)$ wird in der Hauptsache das o -Verfahren von E II benutzt, welches dort

$$(2) \quad P(x) = o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$$

für $r \geq 6$ ergab; sodann werden aber auch Rechnungen aus Mw. herangezogen. Berücksichtigt man noch, daß (2) auch für $r = 5$ gilt (vgl. J. W.), so folgt aus (1)

$$(3) \quad R(x) = o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right), \quad T(x) = o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right). \quad (r \geq 4).$$

Die durch (3) gegebene Größenordnung läßt sich für kein r verschärfen. Zu jedem $\varphi(x)$ und jedem r gibt es nämlich ein Q mit

$$(4) \quad R(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1} \varphi(x)\right), \quad T(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1} \varphi(x)\right).$$

Der Beweis von (4) verläuft elementar. Es wird der Ansatz $Q = k_1^2 + \dots + k_{r-1}^2 + \alpha k_r^2$ gemacht und das irrationale $\alpha > 1$ so bestimmt, daß es hinreichend genau durch rationale Zahlen p_n/q_n angenähert werden kann. Die Betrachtung der Näherungsformen $Q_n = k_1^2 + \dots + k_{r-1}^2 + \frac{p_n}{q_n} k_r^2$ liefert dann das gewünschte Ergebnis.

A. Walfisz (Radoś, Polen).

Jarník, Vojtěch: Zur Theorie der diophantischen Approximationen. *Mh. Math. Phys.* 39, 403—438 (1932).

1. Ein System reeller Zahlen $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ ($s \geq 1$) heiße eigentlich, wenn diese Zahlen linear unabhängig sind in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen. Es

bedeute $E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ die obere Grenze der reellen α , für die zu jedem $A > 0$ ein Gitterpunkt (p_1, \dots, p_s, q) mit $q > A$, $\left| \theta_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{1}{q^\alpha}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) existiert. Bekanntlich ist $\frac{s+1}{s} \leq E(\theta_1, \dots, \theta_s) \leq +\infty$. Verf. leitet nun Schranken her für $E(\theta_1, \theta_2)$, wenn $E(\theta_1)$ und $E(\theta_2)$ bekannt sind. Es sei o. B. d. A. gesetzt $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$, $E(\theta_1) = \alpha_1$, $E(\theta_2) = \alpha_2$, (1) $2 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq +\infty$. Dann gelten (die Sätze 2 und 3 zeigen die Schärfe von Satz 1): Satz 1. Es ist $\text{Max}(\frac{3}{2}, 2\alpha_1/\alpha_1 + 1) \leq E(\theta_1, \theta_2) \leq \alpha_2$. Satz 2. Gilt (1), so gibt es ein eigentliches System (θ_1, θ_2) mit $E(\theta_1) = \alpha_1$, $E(\theta_2) = \alpha_2$, $E(\theta_1, \theta_2) = \text{Max}(\frac{3}{2}, 2\alpha_1/\alpha_1 + 1)$. Satz 3. Gilt (1), so gibt es ein eigentliches System (θ_1, θ_2) mit $E(\theta_1) = \alpha_1$, $E(\theta_2) = \alpha_2$, $E(\theta_1, \theta_2) = \alpha_2$. Satz 1 geht leicht (Schubfachmethode). Satz 2 und 3 verlangen mehrere Fallunterscheidungen, lassen sich deshalb nur schwer skizzieren. So bei Satz 2 drei Fälle. a) $\alpha_1 = \infty$; $2 \leq \alpha_2 \leq \infty$ (leicht mit Kettenbruchungl.), b) $2 = \alpha_2 \leq \alpha_1 < \infty$, c) $2 < \alpha_2 \leq \alpha_1 < \infty$. Den Grundgedanken von b) findet man in c) komplizierter wieder. In b) geht es ungefähr so: 1. Es wird ein spezielles θ_1 gewählt mit $E(\theta_1) = \alpha_1$ (leicht). 2. Für ganzes $t \geq 1$ heiße das ganze q eine Zahl t -ter Stufe, wenn es ein ganzes p' gibt mit $\left| \theta - \frac{p'}{q} \right| < \frac{1}{q^\alpha}$, $2^t \leq q < 2^{t+1}$, wo $\alpha = \text{Max}(\frac{3}{2}, \frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + 1})$.

Jedes offene Intervall $(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^\alpha \log^2 q}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^\alpha \log^2 q})$ ($0 \leq p \leq q$, p, q ganz, q eine Zahl t -ter Stufe) heiße Intervall t -ter Stufe. Es wird nun gezeigt: Ist $S(t)$ die Summe der Längen aller Intervalle t -ter Stufe, so gilt für geeignet gewähltes $T > 0$: $\sum_{t=T}^{\infty} S(t) < \frac{1}{2}$. Mittels des Borelschen Überdeckungssatzes wird dann auf die Existenz einer Zahl θ_2 , die nur in endlich vielen Intervallen irgendeiner Stufe liegt, geschlossen. Dafür wird dann leicht gezeigt $E(\theta_2) = 2$, $E(\theta_1, \theta_2) \leq \alpha$. *J. F. Koksma* (Hilversum).

Corput, J. G. van der: Diophantische Ungleichungen. II. Rhythmische Systeme. Abschnitte A u. B. Acta math. 59, 209–328 (1932).

Wie im Teil I (Acta math. 56; dies. Zbl. 1, 201) wird im (von Teil I unabhängigen) Teil II unter sehr allgemeinen Voraussetzungen untersucht, ob gewisse Systeme von Ungleichungen unendlich viele ganzzahlige Lösungen haben oder nicht. In II A und B definiert und untersucht Verf. einige fruchtbare neue Begriffe (Beweise verlaufen mit einem Minimum an Rechnung); in C und D kann man viele Anwendungen auf dioph. Ungleichungen erwarten. — Abschnitt A. Definition 1. Ist $\varepsilon > 0$, ist das Funktionensystem $(f_v) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$ in jedem Gitterpunkt $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ definiert, ist x irgendein Gitterpunkt aus R_m , so heiße $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \tau(\varepsilon, x, f_v)$ ein zu ε und x gehöriger Verschiebungspunkt von (f_v) , wenn für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ mit $|h_\mu| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ die n Ungleichungen $-\varepsilon < f_v(x + \tau + h) - f_v(x + h) < \varepsilon \pmod{1}$ ($1 \leq v \leq n$) gelten. $[x + h]$ bedeutet $(x_1 + h_1, \dots, x_m + h_m)$, und $-\varepsilon < U < \varepsilon \pmod{1}$ besagt, das für geeignetes ganzes y gilt $-\varepsilon < U - y < \varepsilon$. — Definition 2. (f_v) heiße ein rhythmisches System, wenn jedes $f_v(x)$ des Systems in jedem Gitterpunkt definiert ist und wenn jedem $\varepsilon > 0$ ein nur von ε abhängiges $L = L(\varepsilon, f_v) > 0$ zugeordnet werden kann, so daß für jeden Gitterpunkt x , jeder m -dimensionale, achsenparallele Kubus der Kante L wenigstens ein $\tau(\varepsilon, x, f_v)$ enthält. (Für $n = 1$ hat man eine rhythmische Funktion.) — Verf. zeigt dann Satz 1. Ist (f_v) rhythmisch, $\alpha_v < \beta_v$, und hat das Ungleichungen-System

$$\alpha_v < f_v < \beta_v \pmod{1} \quad (v = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

wenigstens eine ganzzahlige Lösung $x = (x_1, \dots, x_m)$, so hat (1) unendlich viele solche Lösungen. Es gibt sogar eine nur von α_v, β_v und (f_v) abhängige Länge L , derart, daß jeder achsenparallele Kubus in R_m der Kante L wenigstens eine ganzzahlige Lösung von (1) enthält. — Die rhythmischen Systeme haben folgende Eigenschaften: I. Mit (f_v) sind auch die Systeme $(f_1, f_2, \dots, f_n, f_1 + f_2) = (f_v, f_1 + f_2)$ und $(f_v, c f_1)$ rhythmisch (c ganz, fest). II. Ist $\psi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ für jedes $v = (v_1, \dots, v_n)$ von R_n definiert, periodisch modulo 1 [d. h. für $v_v \equiv w_v \pmod{1}$ ist $\psi(v) \equiv \psi(w) \pmod{1}$] und stetig modulo 1 [d. h. es gibt zu jedem v ein ganzes y mit $\lim_{v \rightarrow w} (\psi(v) - y) = \psi(w)$], so ist mit (f_v) auch $(f_v, \psi(f_1, f_2, \dots, f_n))$ rhythmisch. Mittels 7 Hilfssätzen wird bewiesen: Hauptsatz: (f_v) ist dann und nur dann rhythmisch, wenn $(\Delta_\mu f_v)$ es ist. $[(\Delta_\mu f_v)$ besteht aus den $m n$ Funktionen

lationen. III. Sind die n Funktionen f_ν in wenigstens einem Gitterpunkt σ definiert und ist jeder Punkt von R_m eine konstante Translation von (f_ν) , dann besitzt das Ungleichungssystem

$$-\varepsilon < f_\nu(x) - \gamma_\nu < \varepsilon \pmod{1}, \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad x_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s}$$

für jedes $\varepsilon > 0$, jeden Punkt $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ und jede natürliche Zahl s unendlich viele ganzzahlige Lösungen $x = (x_1, \dots, x_m)$. — In einigen Schlußsätzen werden Kriterien angegeben dafür, daß von 2 gegebenen Systemen das eine ärmer ist als das andere, und dafür, daß das eine eine Translation des anderen bildet.

J. F. Koksma (Hilversum).

Koksma, J. F.: Ein mengentheoretischer Satz aus dem Gebiete der diophantischen Approximationen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 35, 959–969 (1932).

Für ganze $x > 0$ sei $f(x)$ definiert und ganzzahlig; für ganze positive x, x' sei $f(x) \neq f(x')$, wenn $x \neq x'$. Es sei $w(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$. Dann gibt es (auf der reellen Zahlengeraden) eine Menge M vom Borelschen Maß Null, die folgende Eigenschaft besitzt: ist θ eine reelle Zahl, die nicht in M liegt und ist α reell, so gibt es unendlichviele ganze x , für welche gilt

$$\alpha < \theta f(x) < \alpha + x^{-1} \cdot w(x) \cdot \log x \pmod{1}.$$

[$a < b < c \pmod{1}$ bedeutet: es gibt ein ganzes y mit $a < b - y < c$.] — Der Beweis beruht auf folgendem Satz von v. d. Corput (ich führe nur eine spezialisierte Form an): Für $\sigma = 1, 2, 3, \dots$ sei a_σ, b_σ ganz, $a_\sigma < b_\sigma$, $\alpha_\sigma < \beta_\sigma \leq \alpha_\sigma + 1$; $f(x)$ sei für alle ganzen x mit $a_\sigma \leq x < b_\sigma$ definiert und reell; für $c > 0$ sei

$$T_\sigma(c) = \sum_{0 < |h| \leq r_\sigma} \left| \frac{1}{b_\sigma - a_\sigma} \sum_{x=a_\sigma}^{b_\sigma-1} e^{2\pi i h f(x)} \right| \left(r_\sigma = \frac{c}{\beta_\sigma - \alpha_\sigma} \log \frac{2}{\beta_\sigma - \alpha_\sigma} \right).$$

Wenn $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} T_\sigma(c) = 0$ für jedes $c > 0$, so ist $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{A_\sigma}{(b_\sigma - a_\sigma)(\beta_\sigma - \alpha_\sigma)} = 1$, wo A_σ die Anzahl derjenigen ganzen x ist, für welche $\alpha_\sigma < f(x) < \beta_\sigma \pmod{1}$, $a_\sigma \leq x < b_\sigma$ gilt. (Der Beweis des letztgenannten Satzes soll in der Abhandlung „Diophantische Ungleichungen“ [Acta math.] erscheinen.)

Jarník (Praha).

Koksma, J. F., und J. Popken: Zur Transzendenz von e^π . J. reine angew. Math. 168, 211–230 (1932).

Der Beweis von A. Gelfond [C. R. 189, 1224 (1929)] für die Transzendenz von e^π läßt sich so ausbauen, daß er folgendes Ergebnis liefert: „Bezeichnet ε eine positive Zahl, $B(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_g x^g \equiv 0$ ein Polynom mit ganzen Koeffizienten aus dem Gaußschen Körper $K(i)$ und ist $B = \max_{\gamma=0,1,\dots,g} (|b_\gamma|, 3)$, so gibt es eine nur von g und ε abhängige Zahl $C > 0$, so daß $|B(e^\pi)| > C B^{-(4+\varepsilon) \frac{\log B}{\log \log B}}$ ist.“ — Beweis: Sei $\zeta_0 = 0$, $\zeta_1 = 1$, $\zeta_2 = i, \dots$ die Folge der ganzen Zahlen aus $K(i)$, geordnet nach steigendem Absolutbetrag und bei gleichem Betrag nach steigendem Argument, ferner

$$(1) \quad F_n(z) = \prod_{\nu=0}^n (z - \zeta_\nu) \quad \text{und} \quad A_n = \sum_{\nu=0}^n \frac{e^{\pi \zeta_\nu}}{F'_n(\zeta_\nu)}, \quad \text{so daß nach dem Residuensatz}$$

$$(2) \quad A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n} \frac{e^{\pi z} dz}{F_n(z)} \quad \text{und} \quad (3) \quad e^{\pi z} - \sum_{n=0}^N A_n F_{n-1}(z) = \frac{F_s(z)}{2\pi i} \int_{K_s} \frac{e^{\pi x} dx}{(x-z) F_s(x)} \quad \text{ist,}$$

wenn K_n den Kreis um $x=0$ mit Radius $\max(n, 4)$ bezeichnet und s in K_s liegt. Nach Gelfond folgert man aus Primzahlsätzen und (1), daß $e^{[\sqrt{n}] \pi} A_n$ ein Polynom vom Grad $2[\sqrt{n}]$ in e^π ist mit Koeffizienten aus $K(i)$, die und deren Hauptnenner $= O(c^n)$ sind, wo $c > 0$ nicht von n abhängt, ferner aus (2), daß $|A_n| < e^{-n \log n + (\pi+1)n}$ ist. Die Verf. zeigen als Ergänzung hierzu, daß für $1 < \lambda \leq 2$ und großes h in jedem

Intervall $h \leq n \leq \lambda h$ ein n mit $|A_n| > e^{-\frac{3\lambda-1}{2\lambda} n \log n}$ liegt; zum Beweis wird (3) mit $s = [\lambda h]$ und $z=0$ h -mal nach z differenziert und die neue rechte Seite und

$\sum_{n=0}^{h-1} A_n F_{n-1}^{(h)}(0)$ nach oben abgeschätzt; dann folgt $\left| \sum_{n=h}^{[\lambda h]} A_n F_{n-1}^{(h)}(0) \right| > \frac{\pi^h}{2}$, so daß ein

Summand $A_n F_{n-1}^{(h)}(0)$ groß sein muß. — Zu jedem großen h gibt es also ein n mit $h \leq n \leq \lambda h$ und hierzu ein Polynom $A_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{m_1} x^{m_1} \neq 0$ mit ganzen Koeffizienten aus $K(i)$ vom Grad $m_1 \leq 2[\sqrt{n}]$, so daß $|a_\mu| < e^{c_1 n}$ ($\mu = 0, 1, \dots, m_1$) und $e^{-\frac{2\lambda-1}{2\lambda} n \log n - c_2 n} < |A_n(e^x)| < e^{-\frac{n \log n}{2} + c_3 n}$ mit drei positiven Konstanten c_1, c_2, c_3 ist. Durch Resultantenbildung zwischen $B(x)$ und $A_n(x)$ folgt bei geeigneten Werten von λ und h jetzt der obige Satz zunächst für irreduzible Polynome und durch Zerlegung in Faktoren auch allgemein. K. Mahler (Krefeld).

Suetuna, Zyoiti: Über die approximative Funktionalgleichung für Dirichletsche L -Funktionen. *Jap. J. Math.* **9**, 111–116 (1932).

Verf. beweist die „approximate functional equation“ für die Dirichletschen Reihen $L(s, \chi)$. Der den Cauchyschen Satz benutzende Beweis ist etwas einfacher als die bisher bekannten, da Verf. sich auf festes σ mit $0 < \sigma < 1$ und den Spezialfall $x = ye^{O(1)}$ beschränkt. Hans Heilbronn (Göttingen).

Analysis.

Labocetta, L.: Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue. III. Funzioni periodiche. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **16**, 212–215 (1932).

Fortsetzung der Aufsätze in derselben Zeitschrift S. 27–32 und 95–101 (dies. Zbl. **5**, 155, 248). Darstellung der Integrale unstetiger periodischer Funktionen mit Hilfe gewisser einfacher Funktionen, die mit eigenen Zeichen belegt sind. L. Schrutka.

Gonzalez Dominguez, Alberto: Anwendung der Theorie singulärer Integrale zum Beweis einer Formel von Stieltjes. *Bol. Semin. mat.* **3**, 35–38 (1932) [Spanisch].

Ein einfacher Beweis des folgenden Satzes von Stieltjes: Aus

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{df(r)}{z+r}, \quad P(z) = \int F(z) dz \quad (1)$$

folgt

$$f(x+0) - f(x-0) = \frac{1}{\pi i} \lim_{q \rightarrow 0} \{P(-x+qi) - P(-x-qi)\}. \quad (2)$$

Zum Beweise bemerkt man, daß aus (1) unmittelbar die Gleichungen

$$P(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{a+r} - \frac{1}{z+r} \right) f(r) dr,$$

$$\frac{1}{\pi i} \{P(-x+qi) - P(-x-qi)\} = \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \frac{2qi f(r) dr}{(r+x)^2 + q^2},$$

folgen; das letzte Integral konvergiert aber mit $q \rightarrow 0$ wegen der allgemeinen Lebesgueschen Sätze über singuläre Integrale gegen $f(x+0) - f(x-0)$. A. Kolmogoroff.

Bohnenblust, F., and E. Hille: Remarks on a problem of Toeplitz. *Ann. of Math.*, II. s. **33**, 785–786 (1932).

The authors consider the m -ic forms $Q_m(x) = \sum_1^n a_{i_1 \dots i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m}$ normalized according to the conditions (I) $a_{i_1 \dots i_m}$ is symmetric in all indices, and (II) $\sum |a_{i_1 \dots i_m}| = 1$. Let $Q_m^0(x)$ be the form for which the $\max |Q_m(x)|$ when $|x_1|, \dots, |x_m| \leq 1$ is the least possible, and $\varphi_m(n) = \max \left[\frac{1}{\max |Q_m^0(x)|} \right]$. On the basis of the results of their previous paper (*Ann. of Math.* **32**; see this Zbl. **1**, 269) they show that $\varphi_m(n) = O(n^{(m-1)/2})$, $[\varphi_m(n)]^{-1} = O(n^{-(m-1)/2})$, uniformly in m . Some misprints occurring in this latter paper are corrected. J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Guareschi, Giacinto: L'algebra delle serie di potenze. *Ist. Lombardo, Rend.*, II. s. **65**, 809–825 (1932).

L'auteur détermine une série de puissances qui représente une détermination quelconque de la puissance i/k d'une série entière donnée, quels que soient i et k . Les

coefficients de cette série sont des fonctions explicites de i, k et des coefficients a_0, a_1, \dots de la série proposée. — La formule comprend évidemment comme cas particulier celles de l'inverse d'une série entière et celle de sa puissance $k^{\text{ième}}$. *E. Blanc* (Poitiers).

Wall, H. S.: On the relationship among the diagonal files of a Padé table. Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 752—760 (1932).

In der Kettenbruchentwicklung $\frac{1}{|a_1 z|} + \frac{1}{|a_2|} + \frac{1}{|a_3 z|} + \dots$ der Potenzreihe $\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots$ sei $a_\nu > 0$, $\sum a_\nu$ konvergent. Der Verf. untersucht die Grenzwerte der Näherungsbrüche in der k -ten Diagonale der Padéschen Tafel (vgl. Zbl. **1**, 392).

Otto Szász (Frankfurt a. M.).

Wright, E. Maitland: The coefficients of a certain power series. J. London Math. Soc. **7**, 256—262 (1932).

Verf. entwickelt die Koeffizienten der Potenzreihe der Funktion

$$\log^k \left(\frac{1}{1-x} \right) (1-x)^\beta \Phi(x) e^{\frac{\alpha}{1-x}},$$

wo α, β komplex, $k \geq 0$ ganz und $\Phi(x)$ für $|x| \leq 1$ regulär ist, in eine semikonvergente Reihe von Besselschen Funktionen. Das erste Glied dieser Entwicklung war bereits durch Herrn Perron bekannt.

Hans Heilbronn (Göttingen).

Bosanquet, L. S.: On the summability of power series. Ann. of Math., II. s. **33**, 758—770 (1932).

In the present paper the author extends to power series the results obtained by Hardy-Littlewood and others, concerning necessary and sufficient conditions for Cesàro summability of Fourier series. The main results of the paper are embodied in the following two theorems. I. If $f(z) = \sum a_n z^n$, where $a_n = o(n^\gamma)$, $\gamma > 0$, and $f(z) \rightarrow A(C, \alpha)$ as $z \rightarrow 1$ in $|z| < 1$, where $\alpha \geq 0$, then $\sum a_n$ is summable (C, β) to the sum A , provided $\beta > \alpha$ and $\beta \geq \gamma$. II. If $\sum a_n$ is summable (C, α) to the sum A , where $\alpha \geq -1$, then $f(z) = \sum a_n z^n$ is regular in $|z| < 1$ and $f(z) \rightarrow A(C, \beta)$ as $z \rightarrow 1$ in $|z| \leq 1$, provided $\beta > \alpha + 1$. By $f(z) \rightarrow A(C, k)$ is meant that

$$\frac{k}{(1-z)^k} \int_z^1 (u-z)^{k-1} f(u) du \rightarrow A \quad \text{as } z \rightarrow 1, \quad |z| < 1.$$

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Koschmieder, Lothar: Vorzeicheneigenschaften der Abschnitte einiger physikalisch bedeutsamer Reihen. Mh. Math. Phys. **39**, 321—344 (1932).

It is a well known fact that the sine-Fourier series expansion

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) = \sqrt{2} \sin k\pi x, \quad \beta_k = \int_0^1 F(x) \varphi_k(x) dx \quad (*)$$

for a function $F(x)$ which is piece-wise continuous together with its derivatives $F'(x)$, $F''(x)$, follows from the representation

$$F(x) = - \int_0^1 K(x, \xi) F''(\xi) d\xi + \sum A_\mu K(x, \xi_\mu) + F(0) K'_x(0, x) - F(1) K'_x(1, x) - \sum B_\nu K'_x(\eta_\nu, x),$$

where $K(x, \xi)$ is the Green's function of the boundary value problem $u''(x) = 0$, $u(0) = u(1) = 0$, and η_ν, ξ_μ are the points of discontinuity of $F(x)$, resp. of $F'(x)$ with

the corresponding jumps $-B_\nu, -A_\mu$. On the other hand, $K(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(\xi)}{k^2 \pi^2}$.

Combining this with the known fact that the partial sums of the series $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi \gamma}{k}$

are always > 0 , $0 < \gamma < 1$, the author draws various conclusions concerning the partial sums of (*). A typical result is that $0 < s_{2n}(x) < (1/4)[F'(0) - F'(1)]$, $0 < x < 1$,

when $B_\mu = 0$, $A_\nu > 0$, while $s_n(x) > 0$, when also $A_\nu = 0$, provided, in either case, $F''(x) < 0$. The same method is applied to derive analogous results for the Fourier series associated with other boundary value problems in one dimension, and finally for certain classes of Legendre series. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Burchall, J. L.: Symbolic relations associated with Fourier transforms. *Quart. J. Math., Oxford Ser. 3*, 213—223 (1932).

The author considers the operator $\delta = x \frac{d}{dx}$ and its symbolic functions $U(\delta)$, $V(\delta)$, ... On the basis of simple formal relations $U(\delta) \sum a_r x^r = \sum a_r U(r) x^r$; $U(\delta) x^r y = x^r U(\delta + r) y$; $U(Vy) = V(Uy) = (UV)y$; $t^\delta f(x) = f(xt)$; $U(\delta) f(x) = \int_a^b w(\delta, t) f(x) dt$ whenever $V(\lambda) = \int_a^b w(\lambda, t) dt$ and introducing the interpretations $\cos \frac{\pi}{2} \delta = \pi / [\Gamma(\frac{1}{2} - \delta/2) \Gamma(\frac{1}{2} + \delta/2)] = \frac{1}{2} \{i^\delta + (-i)^\delta\}$; $\cos \frac{\pi}{2} \delta f(x) = \frac{1}{2} [f(ix) + f(-ix)]$, $\sin \frac{\pi}{2} \delta = \pi / [\Gamma(\delta/2) \Gamma(1 - \delta/2)] = \frac{1}{2i} \{i^\delta - (-1)^\delta\}$; $\sin \frac{\pi}{2} \delta f(x) = \frac{1}{2i} [f(ix) - f(-ix)]$,

the author obtains a great number of interesting relations between definite integrals, some of them being new. This symbolic method proves of value in the discussion of self-reciprocal functions associated with various transforms, viz., Fourier transforms, Hankel transforms etc. The procedure is purely formal and the results obtained are subject to subsequent rigorous justification. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Saks, S.: On the generalized derivatives. *J. London Math. Soc. 7*, 247—251 (1932).

The author, generalising some results of Verblunsky [*Proc. London Math. Soc. 31*, 387—406 (1930)] proves, among others, the following theorems, which find an application in the theory of uniqueness of trigonometric series. Let

$$\begin{aligned} \Delta^3 F(x, h) &= F(x + 3h) - 3F(x + h) + 3F(x - h) - F(x - 3h), \\ \underline{D}^3 F(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} (2h)^{-3} \Delta^3 F(x, h). \end{aligned}$$

$\bar{D}^3 F$ is defined similarly, and the common value of $\underline{D}^3 F$ and $\bar{D}^3 F$ is denoted by $D^3 F$. Then, 1° if $F'(x)$ exists and is finite in an interval $a \leq x \leq b$, and $\underline{D}^3 F > 0$ in the interior of this interval, then F' is continuous, convex and $\Delta^3 F(x_0, h_0) \geq 0$, for every x_0, h_0 such that $x_0 \pm 3h_0$ belong to (a, b) . Moreover, 2° Under the last condition, $(2h_0)^{-3} \Delta^3 F(x_0, h_0)$ lies between the upper and lower bounds of $D^3 F(x)$ in the interval $(x_0 - 3h_0, x_0 + 3h_0)$, provided that F' and $D^3 F$ exist and are finite in (a, b) . The argument is different from Verblunsky's and simpler. *A. Zygmund* (Wilno).

Vignaux: Sur la méthode de sommation de Riemann. *C. R. Acad. Sci., Paris 195*, 750—751 (1932).

Une série $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ est dite sommable (R, δ) avec la somme S si l'on a

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot \left[\frac{\sin nx}{nx} \right]^\delta = \lim_{x \rightarrow +0} R_\delta(x) = S,$$

la série de somme $R_\delta(x)$ étant convergente dans $0 < x \leq \varepsilon$, $\varepsilon' > 0$. L'auteur a prouvé que la série-produit des deux séries sommables (R, α) et (R, β) est sûrement sommable $(R, \alpha + \beta + 1)$ et qu'en outre la multiplication d'une série divergente sommable (R, δ) par une série absolument convergente donne une série-produit également sommable (R, δ) , les deux théorèmes subsistant pour la multiplication des intégrales sommables (R, δ) . Ces résultats intéressants en eux-mêmes semblent indiquer qu'au point de vue de multiplication le procédé (R, δ) possède les propriétés du procédé de Cesaro (C, δ) . Si la fonction $R_\delta(x)$ est à variation bornée dans $(0, \varepsilon)$ on dira que la série est absolument sommable (R, δ) , bref sommable $|R, \delta|$. Les résultats de M. Vignaux suggèrent l'extension au procédé $|R, \delta|$ des théorèmes bien connus relatifs à celui $|C, \delta|$. Ainsi p. ex. on doit pouvoir établir que la série-produit des deux séries sommables $|R, \alpha|$ et $|R, \beta|$ est sûrement sommable $|R, \alpha + \beta|$. *E. Kogbetliantz*.

Zygmund, A.: A remark on conjugate series. Proc. London Math. Soc., II. s. 34, 392—400 (1932).

Es wurde früher vom Verf. bewiesen, daß aus der Integrierbarkeit von $|f| \log^+ |f|$ die Konvergenz im Mittel der Fourierreihe von f folgt. Wenn aber $\varepsilon(x) = O\{\log^+ |x|\}$ ist, so kann man eine solche Funktion f finden, daß $|f| \varepsilon(|f|)$ integrierbar und die entsprechende Fourierreihe nicht im Mittel konvergent wird. Jetzt beweist Verf., daß man dabei auch den Ausdruck $|g| \varepsilon(|g|)$ für die zu f konjugierte Funktion g integrierbar machen kann. Außerdem beweist Verf. den folgenden Satz: Wenn f und g gleichzeitig summierbar sind, so folgt aus der Konvergenz im Mittel der Fourierreihe von f dieselbe für g . *A. Kolmogoroff (Moskau).*

Obrechhoff, Nikola: Sur la sommation de la série trigonométrique de Fourier et de la série conjuguée. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 752—754 (1932).

$f(x)$ étant intégrable L , posons: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ (1) et (pour x fixe) $\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2A$, où A est une fonction de x , égale à $f(x)$ aux points de continuité de $f(x)$. Posons $\mu_k(x) = kx^{k-1} \int_0^x (x-t)^{k-1} \varphi(t) dt$. Le théorème suivant généralise ceux de M. M. Lebesgue, Hardy-Littlewood, Pollard et Bosanquet: Si $\int_0^t |\mu_m(\tau)| d\tau = o(t)$ ($t \rightarrow 0$), alors (1) est sommable (C, K) pour chaque $K > m$ avec la somme A . On peut remplacer la condition précédente en remplaçant o par O et en ajoutant que $\mu_{m+1}(t) \rightarrow 0$, ($t \rightarrow 0$). L'auteur donne aussi quelques théorèmes sur la sommabilité (C, K) de la série conjuguée de (1). *Mandelbrojt.*

Moursund, A. F.: On a method of summation of Fourier series. Ann. of Math., II. s. 33, 773—784 (1932).

The author investigates the method of summation introduced by F. Nevanlinna [Översikt av Finska Vet.-Soc. Förhandl. 64, A, Nr 3 (1921—1922)] consisting in defining

the generalized limit $\lim_{n \rightarrow \infty} N_q F(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 q(t) F(nt) dt$, where $q(t)$ is a given function > 0 and increasing in $0 < t < 1$ and such that $\int_0^1 q(t) dt = 1$, $\int_0^1 q(t) \log 1/(1-t) dt < \infty$.

The author shows that this method is effective for the summation of Fourier series, and of its conjugate series, of class L , as well as for the summation of the derived series of the Fourier series of a function of bounded variation, and of its conjugate series. The following result should be mentioned separately: If the function $f(x) \in L$, then the $(C, 1) N_q$ sum of its Fourier series is equal to $f(x)$ at each point x where

$$\Phi^*(s) \equiv \int_0^s [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] dt = o(s).$$

This result is a generalization of the well known result concerning the Cesàro sum $(C, 1 + \delta)$ of the Fourier series of $f(x)$. *J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).*

Differentialgleichungen:

● **Hoheisel, Guido:** Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. (Göschens Samml. Nr. 1059.) Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter 1933. 148 S. RM. 1.62.

Remes, Eugène: Quelques méthodes pour l'intégration numérique des équations différentielles avec une appréciation de la limite de l'erreur commise. Acad. Sci. Ukraine, Bull. Nr 1, 1—37 u. franz. Zusammenfassung 37—38 (1931) [Ukrainisch].

L'A. expose en détails sa méthode de solution approchée des équations différentielles ordinaires et des systèmes de ces équations, dont il avait indiqué les principes dans le Philos. Mag. 1928, 392—400. *V. Glivenko (Moscou).*

Lampariello, G.: Sull'integrale olomorfo e nullo per $x = 0$ dell'equazione $x \frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 13, 13—18 (1931).

Il est depuis longtemps connu que quand dans l'équation $x \frac{dy}{dx} = \alpha x + \beta y + \dots$ la partie réelle de β est négative, l'équation n'admet pas d'autre intégrale s'annulant pour $x = 0$ que l'intégrale holomorphe (Picard, Cours d'analyse, t. 3, 27). Il est important d'indiquer un domaine des valeurs de x , pour lequel on pourrait être sûr de la convergence de ladite intégrale. C'est ce que fait l'auteur (en supposant x réel et β réel négatif) avec l'aide de la méthode des approximations successives. Janczewski.

Biggiogero, Giuseppina: Studio algebrico-geometrico di una particolare equazione algebrica a radici tutte reali. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 65, 673—682 (1932).

Die folgende Aufgabe der Mechanik (eine Verallgemeinerung der harmonischen Bewegung auf einer Geraden): Auf einer Geraden seien n Punkte verteilt, von denen jeder auf seine beiden Nachbarn mit einer Anziehungskraft, deren Stärke dem Abstand proportional ist, einwirkt, führt auf das Differentialsystem: $x'_1 = x_2 - x_1$, $x'_2 = x_3 - 2x_2 + x_1$, $x'_3 = x_4 - 2x_3 + x_2$, \dots , $x'_{n-1} = x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}$, $x'_n = x_{n-1} - x_n$. Durch Differentiation und Elimination kann man in bekannter Weise auf eine einzige Differentialgleichung $2n$ -ter Ordnung für eine der unbekannten Funktionen, etwa x_n , gelangen. Sie enthält nur gerade Ableitungen, und ist von x_n selbst frei, so daß ihre charakteristische Gleichung nach Einführung des Quadrats der Unbekannten als neue Unbekannte, wieder mit dem Buchstaben x bezeichnet, und Division durch x die Gestalt $F_n(x) = A_{n,n}x^{n-1} + A_{n,n-1}x^{n-2} + \dots + A_{n,2}x + A_{n,1} = 0$ annimmt. Die Polynome $F_n(x)$ haben bemerkenswerte Eigenschaften. Ihre Koeffizienten sind sämtlich positiv, sie haben daher keine positiven Nullstellen. Sie genügen einer Rekursionsformel: $F_n(x) = (x+2)F_{n-1}(x) - F_{n-2}(x)$. Die parabolischen Kurven $y = F_n(x)$ sind für gerades n symmetrisch zum Punkt $(-2, 0)$, für ungerades n zur Geraden $x = -2$. Die größte Wurzel von $F_n(x) = 0$ ist größer als die größte Wurzel von $F_{n-1}(x) = 0$. Die sämtlichen Wurzeln von $F_n(x) = 0$ sind reell und verschieden und werden durch die Wurzeln von $F_{n-1}(x) = 0$ getrennt. L. Schrutka.

Underwood, F.: Some linear differential equations with periodic coefficients having integrals which are polynomials in $\sin x$. J. London Math. Soc. 7, 263—265 (1932).

Sind in der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \cos x \cdot p_1(\sin x) \frac{dy}{dx} + p_2(\sin x) y = \Phi(\sin x)$$

p_1, p_2, Φ drei Polynome, so kann man eine Lösung y der Form $\varphi(\sin x)$ (mit φ Polynom) aufsuchen. Die Existenz einer derartigen Lösung hängt von der Diskussion des Systems linearer Gleichungen ab, das man durch Einsetzung von $\varphi(\sin x)$ in der Differentialgleichung und nachträgliche Ausgleichung der Koeffizienten jeder Potenz von $\sin x$ erhält. Diese Bemerkung kann auf einige Differentialgleichungen angewandt werden, die schon von Whittaker und Ince studiert worden sind. G. Cimmino.

Rosenblatt, Alfred: Sur l'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 1, 210—213 (1932).

Giraud, Georges: Généralisation des problèmes sur les opérations du type elliptique. Bull. Sci. math., II. s. 56, 248—272, 281—312 u. 316—352 (1932).

Die Theorie der linearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung wird in größter Allgemeinheit entwickelt, indem von den Koeffizienten möglichst wenig vorausgesetzt wird — im allgemeinen bloß Stetigkeit und von den Koeffizienten der zweiten Ableitungen der gesuchten Funktion noch eine Höldersche Bedingung. Eine weitere Verallgemeinerung besteht darin, daß von der Lösung nicht mehr zweimalige Differenzierbarkeit vorausgesetzt wird: der Teil der Differentialgleichung, der die zweiten Ableitungen der gesuchten Funktion enthält, wird durch den Grenzwert eines Ausdrucks ersetzt, der von der gesuchten Funktion und von zwei Parametern abhängt (vgl. das Ref. über eine C.R.-Note des Verf., dies Zbl. 2,

263). Das Verfahren verallgemeinert eine von Zaremba für die Potentialgleichung entwickelte Methode. Ist eine Funktion zweimal differenzierbar, so liefert diese neue Operation auf sie angewandt dasselbe Resultat wie die ursprüngliche. Die wichtigsten Sätze über die Unmöglichkeit von Extremwerten für die Lösungen der elliptischen Differentialgleichungen und über ihre isolierten singulären Stellen gelten auch für die Lösungen der so verallgemeinerten Gleichungen. Mit Hilfe der Fredholmschen Theorie wird für diese auch eine Grundlösung konstruiert, wobei bemerkenswert ist, daß die übliche Annahme, daß die Koeffizienten außerhalb eines bestimmten Bereiches konstant seien, nicht gemacht werden muß. Die Schwierigkeit besteht dabei in der Notwendigkeit, Integralgleichungen in unbeschränkten Gebieten zu verwenden, für die die Fredholmsche Theorie nicht ohne weiteres gilt. Nach diesen Vorbereitungen kann die zweite Randwertaufgabe (die ebenfalls sehr allgemein formuliert wird) ohne besondere Schwierigkeiten auf Fredholmsche Integralgleichungen zurückgeführt werden. Bei der ersten Randwertaufgabe ergeben sich noch einige Komplikationen, vor allem in den Fällen, daß keine adjungierte Gleichung existiert, doch führen die Integralgleichungen auch hier zum Ziel. *Willy Feller (Kiel).*

Rellich, Franz: Zur ersten Randwertaufgabe bei Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus; differentialgeometrische Anwendungen. *Math. Ann.* **107**, 505—513 (1932).

Während man für die quasilinearen elliptischen Differentialgleichungen, die die unbekannte Funktion explizit nicht enthalten, die höchstens eindeutige Lösbarkeit der ersten Randwertaufgabe unter sehr geringen Voraussetzungen kennt (insbesondere nach E. Hopf, *S.-B. preuß. Akad. Wiss.* **1927**, 147), gestattet die Differentialgleichung

$$F \equiv E(u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2) + A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} + D = 0,$$

$$A, B, C, D, E(x, y, u_x, u_y),$$

— allgemein zu reden — selbst, wenn man nur Lösungen betrachtet, für die sie elliptisch ist, sicher keine solche Eindeutigkeitsaussage. Verf. zeigt hingegen, daß es zu vorgegebenen stetigen Randwerten u höchstens zwei Lösungen u gibt, für die F elliptisch wird. Der Beweis beruht auf einer Klasseneinteilung der Lösungen in solche mit $E u_{xx} + C > 0$ und $E u_{xx} + C < 0$; man beweist, daß in jeder Klasse nicht mehr als ein Vertreter vorhanden sein kann, indem man für die Differenz zweier Lösungen derselben Klasse zwei Monge-Ampèresche Differentialgleichungen findet, aus denen folgt, daß diese Differenz in keinem inneren Punkte ein Maximum oder Minimum besitzt. — Falls $ABCDE$ nicht von u_x, u_y abhängen, und E nur in einen einzigen inneren Punkt verschwindet, folgt sogar Eindeutigkeit. Der genannte Satz über die Zweideutigkeit findet in der Differentialgeometrie, wo die Monge-Ampèreschen Gleichungen häufig vorkommen, mehrere interessante Anwendungen. *Hans Lewy (Göttingen).*

Saltikov, N.: Methods of Monge-Ampère for integration of partial differential equations of the second order, and their generalization. *Zap. russk. naučn. Inst. Beograd*, Liefg **6**, 1—34 (1932) [Russisch].

The author discusses critically the existing expositions of the theory of intermediary integrals due to Monge and Ampère (Boole, Imschenetzky, Darboux). In particular the case of Laplace's equation admitting of intermediary integrals is treated. Finally the author indicates various simplifications in the theory of intermediary integrals for partial equations of the second order with several independent variables, as developed by Goursat and Vivanti. Several special examples are discussed. *J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).*

Cibrario, Maria: Sui teoremi di esistenza e di unicITÀ relativi ad alcune equazioni differenziali a derivate parziali. I. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **13**, 26—31 (1931).

Es handelt sich um die Gleichung

$$a(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y, z) = m(x, y).$$

Die Existenz und die Eindeutigkeit einer Lösung $z(x, y)$, die auf einem gegebenen offenen Bogen vorgeschriebene Werte annimmt, wurde schon von Colucci [Atti Accad. Sci. Torino **64** (1929)] durch die Methode der charakteristischen Linien bewiesen, falls $c(x, y, z)$ von z linear abhängt. Dieselbe Methode wird hier angewandt, um den gleichen Satz im allgemeinen Fall zu gewinnen. *G. Cimmino* (Napoli).

Cibrario, Maria: Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **65**, 889—906 (1932).

Verf. betrachtet die Gleichung

$$Az_{xx} + 2Bz_{xy} + Cz_{yy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$$

in einem Gebiete, in welchem $AC - B^2$ sowohl positive als negative Werte annimmt. Es wird eine umkehrbare, reguläre Transformation $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ gesucht, die die gegebene Gleichung auf eine einfachere (kanonische) Form zurückführt, wobei die Koeffizienten von $z_{\xi\eta}$ und $z_{\eta\eta}$ bzw. 0 und 1 sind, während die Linie γ , auf welcher $AC - B^2 = 0$ in der (x, y) -Ebene, in eine Strecke der ξ -Achse oder der η -Achse übergeführt wird. Das hängt von der Auflösung einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung ab. Verf. beweist, auf Grund ihrer früheren Ergebnisse über solche Differentialgleichungen (vgl. vorstehendes Ref.), die Existenz der genannten Transformation, unter passenden Voraussetzungen über die Differentiierbarkeit der Koeffizienten und deren Verhalten längs der Linie γ . Ferner zeigt Verf., daß die gefundenen kanonischen Formen gegen umkehrbare, singularitätenfreie Variablentransformationen nicht äquivalent sind. *G. Cimmino* (Napoli).

Picone, M.: Una proprietà integrale delle soluzioni dell'equazione del calore e sue applicazioni. Giorn. Ist. Ital. Attuari **3**, 356—363 (1932).

Für $a' \leq x \leq a''$, $y \geq 0$ sei $u(x, y)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_{xx} - u_y = 0$. Es wird gezeigt: jede Lösung dieser Gleichung, die gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften besitzt und gewissen Wachstumsbeschränkungen unterworfen ist, genügt der Integralgleichung

$$\int_0^\infty e^{-ty} u(x, y) dy = \alpha(t) \mathfrak{Cof}(\sqrt{t}x) + \beta(t) \mathfrak{Sin}(\sqrt{t}x) - \frac{1}{\sqrt{t}} \int_a^x u(\xi, 0) \mathfrak{Sin}[\sqrt{t}(x - \xi)] d\xi$$

für jedes $t > 0$, $a' < x < a''$, wobei $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ nur von t abhängen. An diese Integralgleichung anknüpfend, werden verschiedene Randwertprobleme behandelt.

Rellich (Göttingen).

● **Levi-Civita, Tullio:** Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes. Leçons rédig. par G. Lampariello. Traduction de l'italien par M. Brelot. (Union franç. comité pour l'expansion du livre scient.) Paris: Felix Alcan 1932. X, 114 S. u. 4 Fig. Frs. 20.—.

Übersetzung des Buches: „Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondata“ (dies. Zbl. **3**, 114). Gegenüber der italienischen Ausgabe ist neu hinzugekommen § 9: Application aux milieux élastiques. Er behandelt im Anschluß an G. Lampariello die Wellenfortpflanzung in elastischen Medien bei kleinen Deformationen.

Rellich (Göttingen).

Mitchell, Joseph S.: A note on Huygens' principle. Philos. Mag., VII. s. **14**, 938 bis 939 (1932).

Die Kirchhoffsche Formel wird unter Verwendung des Fourierschen Integraltheorems abgeleitet.

K. Friedrichs (Braunschweig).

Brelot, Marcel: Sur les singularités ponctuelles des fonctions sous-harmoniques. C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 693—694 (1932).

The author states that a great part of the results of his Thesis [Ann. École norm., III. s. **48**, 153—246 (1931); this Zbl. **2**, 259] and of a subsequent paper [Bull. Sci. math., II. s. **55**, 281—296 (1931); this Zbl. **2**, 392] are readily derivable from

the fundamental properties of subharmonic functions. The proof will appear in another place.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Kravčuk, M.: Sur l'existence et l'évaluation approchée des solutions de certaines équations aux dérivées partielles. II. comm. Acad. Sci. Ukraine, Bull. Nr 1, 45—74 u. franz. Zusammenfassung 74—89 (1931) [Ukrainisch].

Considérons l'expression

$$L(z) \equiv \partial^2 z / \partial x^2 + \partial^2 z / \partial y^2 + \lambda(a(x, y) \partial z / \partial x + b(x, y) \partial z / \partial y + c(x, y) z)$$

et cherchons à déterminer approximativement la fonction z qui, dans un domaine limité Σ , satisfait à l'équation $L(z) = f(x, y)$ et qui sur sa frontière S s'annule. A cet effet, posons $L(z) = M(z) + \lambda N(z)$ où

$$M(z) \equiv \partial^2 z / \partial x^2 + \partial^2 z / \partial y^2 + A(x, y) \partial z / \partial x + B(x, y) \partial z / \partial y + C(x, y) z,$$

les coefficients A, B, C étant choisis de la manière que le système $M(\bar{z}) = 0$ dans Σ , $\bar{z} = 0$ sur S ait l'unique solution $\bar{z} = 0$; prenons un système des m fonctions $\Psi_i(x, y)$ linéairement indépendantes et telles que les m équations $M(z) = \Psi_i$ aient, dans Σ , les solutions uniques $\psi_i(x, y)$ s'annulant sur S ; et définissons les m coefficients constants de la somme

$$z_m = \sum_{i=1}^m a_i^{(m)} \psi_i(x, y)$$

par les m conditions que voici:

$$\iint_{\Sigma} \{L(z_m) - f\} M(\psi_i) dx dy = 0.$$

Alors, si z est la solution unique de l'équation $L(z) = f(x, y)$, on aura,

$$\text{pour } m \rightarrow \infty, \quad z_m \rightarrow z, \quad \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial z_m}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx dy \rightarrow 0, \quad \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial z_m}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 dx dy \rightarrow 0,$$

sauf, peut-être, pour quelques valeurs isolées de λ . Si l'on ne suppose pas à l'avance l'existence de la solution z , ce procédé même permet de la démontrer. (I. voir ce Zbl. 3, 115.)

V. Glivenko (Moskau).

Mangeron, D.: Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziali di quart'ordine con le caratteristiche reali doppie. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 2, 29—40 (1932).

Der Autor faßt in dieser Mitteilung die Hauptresultate seiner Dissertation über die Gleichung

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - \lambda A(x, y) u = f(x, y), \quad a \leq x \leq c, \quad b \leq y \leq d$$

kurz zusammen. Die Sätze beziehen sich auf Lösungen $u(x, y)$, die auf dem Rand des Definitionsrechtecks verschwinden. Es wird dabei eine vollkommene Analogie mit den an beiden Enden eines Intervalls verschwindenden Lösungen der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung aufgefunden. Die Existenz unendlich vieler reeller Eigenwerte wird zunächst durch die Methode der Greenschen Funktion, auf Grund der Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen mit symmetrisierbarem Kern, bewiesen. Die Eigenwerte bilden ein diskontinuierliches Spektrum

$$\dots \leq \lambda_{-n} \leq \dots \leq \lambda_{-1} \leq \lambda_{-0} < 0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

(wobei $\lambda_{-0} = -\infty$, wenn $A(x, y) \geq 0$, und $\lambda_0 = +\infty$, wenn $A(x, y) \leq 0$); sie können auch mittels Extremaleigenschaften charakterisiert werden: der Eigenwert $\lambda_{\pm n}$ und die zugehörige Eigenfunktion $u_{\pm n}(x, y)$ sind nämlich bzw. das Minimum des Integrals

$$\int_a^c \int_b^d \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy,$$

bei den Nebenbedingungen

$$\int_a^c \int_b^d A \varphi^2 dx dy = \pm 1, \quad \int_a^c \int_b^d A \varphi u_i dx dy = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

und die Funktion $\varphi = u_{\pm n}$, für welche dieses Minimum erreicht wird. Gemäß dem Courantschen Gedankengange wird dann der Eigenwert $\lambda_{\pm n}$ durch eine Maximum-Minimum-Eigenschaft unabhängig von den Eigenfunktionen $u_{\pm i}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) definiert. Daraus folgt der Sturmsche Satz: Die Knotenlinien der Eigenfunktion $u_{\pm n}(x, y)$ zerlegen das Rechteck in höchstens $n+1$ Teilgebiete. Verf. gibt weiter mehrere Abschätzungen der Form $\text{Max } |u| \leq K \cdot \text{Max } |f|$, wobei K einen $\text{Max } \mathcal{A}$ oder einige Eigenwerte enthaltenden Ausdruck bedeutet; solche Abschätzungen sind ganz ähnlich denjenigen, die von Picone für den Fall der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung bewiesen worden sind. Es wird endlich auf die Möglichkeit einiger Verallgemeinerungen kurz hingewiesen.

G. Cimmino (Napoli).

Narliker, V. V.: The restriction to linearity of the Lorentz transformation. Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 460–462 (1932).

Beweis, daß die einzigen infinitesimalen Transformationen, die die Wellengleichung

$$\sum \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n^2} = 0$$

invariant lassen, sich bis auf einen skalaren Faktor als Summe einer inf. Translation und einer inf. Drehung darstellen lassen.

Heckmann (Göttingen).

Muschelišvili, N.: Recherches sur les problèmes aux limites relatifs à l'équation biharmonique et aux équations de l'élasticité à deux dimensions. Math. Ann. 107, 282–312 (1932).

Diese Arbeit handelt von der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung $\Delta \Delta u = 0$, wenn am Rande des Gebietes u mit ersten Ableitungen vorgegeben ist. Zunächst wird die Gesamtheit der Lösungen von $\Delta \Delta u = 0$ durch zwei willkürliche analytische Funktionen von $x + iy$ dargestellt; nach konformer Abbildung des Gebietes auf den Einheitskreis ergibt sich für eine von ihnen aus den Randbedingungen eine einfache Fredholmsche Integralgleichung mit stetigem Kern. Deren Lösung führt zur gesuchten Lösung der Randwertaufgabe. — Insbesondere wird hier zum erstenmal auch das äußere Problem gelöst unter Bedingungen, die die Eindeutigkeit garantieren. — Schließlich wird in ähnlicher Weise das Problem der ebenen Elastizitätsgleichungen mit gegebenen Randwerten der zwei gesuchten Funktionen behandelt.

K. Friedrichs (Braunschweig).

● **Popoff, Kyrill:** Das Hauptproblem der äußeren Ballistik im Lichte der modernen Mathematik. (Math. u. ihre Anwendungen in Monogr. u. Lehrbüchern. Begr. v. E. Hilb. Hrsg. v. E. Artin u. G. Kowalewski. Bd. 11.) Leipzig: Akad. Verlagsges. m. b. H. 1932. XI, 214 S. u. 9 Abb. RM. 16.40.

In dem vorliegenden Buch gibt der Verf. eine zusammenfassende Darstellung der bisher vorliegenden Theorien, wobei besonderes Gewicht auf eine strenge mathematische Basis gelegt wird. An den Anfang gestellt ist eine Diskussion über die Widerstandsfunktion und die verschiedenen Formen der ballistischen Bewegungsgleichungen (Hodographengleichung). Es werden sodann die Lösungen der Hodographengleichung besprochen, die man durch eine endliche Anzahl von Quadraturen erhält. Hierbei werden die Arbeiten von I. Drach ausführlich wiedergegeben, der die Galoisschen Ideen in das Gebiet der Differentialgleichungen eingeführt hat. Ferner werden in weitem Rahmen die Lösungen der Differentialgleichungen der Bewegung durch unendliche Reihen behandelt, wobei unter Benutzung der Theorie der Differentialgleichung, wie sie von Poincaré, Picard, Liapounoff, Bendixon, Perron ausgearbeitet worden ist, auf die Frage nach der Konvergenz der Reihen, den singulären Stellen der Differentialgleichung, den extremalen Werten der Geschwindigkeit usw. näher eingegangen wird. In einem zweiten Abschnitte des Buches werden schließlich die Lösungen der Differentialgleichung unter der Voraussetzung einer Atmosphäre veränderlicher Dichte diskutiert, wobei verschiedene Ansätze für die Dichteänderung gemacht werden.

J. J. Sommer (München).

Spezielle Funktionen:

Greenleaf, Herriek. E. H.: Curve approximation by means of functions analogous to the Hermite polynomials. Ann. math. Statist. 3, 204—255 (1932).

L'A. fait l'étude des polynomes

$$\Phi_n(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$$

qui peuvent être définis par les formules de récurrence que voici, p étant un entier $\geq n$ donné à l'avance:

$$\Phi_0(x) = 1, \quad \Phi_1(x) = x, \quad 4\Phi_{n+1}(x) - 4x\Phi_n(x) + n(2p+1-n)\Phi_{n-1}(x) = 0.$$

Si l'on désigne par C_x le terme général dans le développement de $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^p$, ça veut dire que

$$C_x = \frac{(2p)!}{(p+x)!(p-x)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{p+x} \left(\frac{1}{2}\right)^{p-x},$$

on a

$$\sum_{x=-p}^p C_x \Phi_n(x)^2 = \frac{(2p)!}{(2p-n)!} \frac{n!}{2^{2n}}, \quad \sum_{x=-p}^p C_x \Phi_m(x) \Phi_n(x) = 0 \quad (m \neq n).$$

Si l'on veut, pour une fonction y_x , faire minimum l'expression

$$\sum_{x=-p}^p [y_x - a_0 \Phi_0(x) C_x - a_1 \Phi_1(x) C_x - \dots - a_n \Phi_n(x) C_x]^2,$$

on obtient, pour $s = 0, 1, \dots, n$,

$$a_s = (b_0 M_0 + b_1 M_1 + \dots + b_s M_s) : \sum_{x=-p}^p C_x \Phi_s(x)^2,$$

où les M_k sont les moments de x ,

$$M_k = \sum_{x=-p}^p x^k y_x.$$

L'A. donne les tableaux permettant de calculer les a_s jusqu'à a_6 pour $p = 3, 4, \dots, 20$.

Les $\Phi_n(x)$ satisfont à l'équation suivante aux différences finies:

$$(p-x-1)\Delta^2 \Phi_n(x) + 2(n-1-x)\Delta \Phi_n(x) + 2n\Phi_n(x) = 0.$$

En outre, ils peuvent être définis directement comme il suit:

$$\Phi_n(x) = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \dots & 1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & \dots & x \\ m_2 & m_3 & m_4 & \dots & x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_n & m_{n+1} & m_{n+2} & \dots & x^n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_{n-1} \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n-1} & m_n & \dots & m_{2n-2} \end{vmatrix},$$

où les m_k sont encore les moments de x ,

$$m_k = \sum_{x=-p}^p x^k C_x$$

(les m_k aux indices k impaires sont nuls).

V. Glivenko (Moscou).

Molina, Edward C.: An expansion for Laplacian integrals in terms of incomplete gamma functions, and some applications. Bell Syst. Techn. J. 11, 563—575 (1932).

La transformation de Laplace („Théorie analytique des probabilités“, Livre 1, Partie 2, Chapitre 1) consiste en ce que dans l'intégrale

$$J = \int y^n \varphi dx \quad (\text{pour } n \text{ très grand})$$

on pose

$$y^n \varphi = Y e^{-t}, \quad \frac{dx}{dt} = \sum A_\nu \frac{t^\nu}{\nu!},$$

d'où il suit

$$J = Y \sum \frac{A_\nu}{\nu!} \int e^{-t} t^\nu dt.$$

Ici, on trouve une modification caractérisée par les égalités

$$y = Y e^{-t}, \quad \frac{\varphi}{y^w} \frac{dx}{dt} = \sum A_\nu \frac{t^\nu}{\nu!},$$

ce qui donne

$$J = \int y^{n+w} \cdot \frac{y}{y^w} dx = Y^{n+w} \sum \frac{A_v}{v!} \int e^{-(n+w)t} v^v dt,$$

le nombre w étant à choisir. — Applications aux fonctions Béta et de Bessel.

W. Gontscharoff (Moskau).

Poritsky, Hillel: On operations permutable with the Laplacian. Amer. J. Math. 54, 667—691 (1932).

If we consider a series of concentric spheres and a point function u we may associate with u a function $A(u)$ whose value at any point P is the average of the values of u over the sphere of the system which passes through P . The author shows that the Laplacian of $A(u) = A$ (Laplacian of u) i. e. that the Laplacian operation and the averaging operations are commutative. Generalizations of the averaging process (which are essentially the same as the operations necessary in the expansion of a function in a series of surface harmonics) are introduced and shown to have also the property of being commutative with the Laplacian. Some further generalizations and extensions to elliptic and hyperbolic spaces are considered. Murnaghan (Baltimore).

MacRobert, T. M.: The Mehler-Dirichlet integral and some other Legendre function formulae. Philos. Mag., VII. s. 14, 632—656 (1932).

The function $T_n^m(x)$ is defined by the equation $T_n^m(x) = e^{\frac{1}{2}m\pi i} P_n^m(x)$ where $P_n^m(z)$ is the associated Legendre function which is real when z is real and greater than one. The Mehler-Dirichlet integral for $\sin m\theta \cdot T_n^{-m}(\cos\theta)$ is proved for $0 < \theta < \pi, m > -\frac{1}{2}$. — The interpolation formula

$$f(n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n-p)\pi}{(n-p)\pi} f(p)$$

is shown to hold for the following functions

$$\begin{aligned} f(n) &= \cos(n + \tfrac{1}{2})\Phi, & -\pi < \Phi < \pi, & & f(n) &= T_n^{-m}(\cos\theta), & -\pi < \theta < \pi, & m \geq 0 \\ f(n) &= \cos(n + \tfrac{1}{2})\Phi \cos(n + \tfrac{1}{2})\Psi, & -\pi < \Phi \pm \Psi < \pi, & & f(n) &= P_n(\cos\theta), & -\pi < \theta < \pi, \\ f(n) &= T_n^{-l}(\cos\theta) T_n^{-m}(\cos\theta'), & -\pi < \theta + \theta' < \pi, & -\pi < \theta - \theta' < \pi, & l \geq 0, & m \geq 0 \\ f(n) &= T_n^m(x) T_n^{-m}(x'), & -1 < x < 1, & -1 < x' < 1, & \theta + \theta' < \pi, \end{aligned}$$

(m a positive integer, $x = \cos\theta$, $x' = \cos\theta'$)

most of these results having been obtained otherwise by Dougall. The recurrence and addition formulae for various Legendre functions and tesseral harmonics are discussed and after indicating an alternative derivation of the Mehler-Dirichlet formula the author finds some new formulae of a similar type. H. Bateman (Pasadena).

Devisme, Jacques: Sur quelques applications des fonctions hypergéométriques. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 936—938 (1932).

Verallgemeinerung der Polynome von Gegenbauer und Hermite. Aufstellung von Lösungen der Differentialgleichungen

$$k\Delta_3 U = U_t, \quad k\Delta_3 U = U_{tt} \quad (\text{mit } \Delta_3 U = U_{xxx} + U_{yyy} + U_{zzz} - 3U_{xyz})$$

unter Benutzung der Funktionen von Appell. Rellich (Göttingen).

Funktionentheorie:

Tamarkin, J. D.: Remarks on the theory of conjugate functions. Proc. London Math. Soc., II. s. 34, 379—391 (1932).

Es sei $w(z) = u(z) + i v(z)$, $z = r e^{i\theta}$, eine im Kreise $|z| < 1$ analytische Funktion mit $w(0) = 0$. Bezeichnet man

$$M_p(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\omega(z)|^p d\theta,$$

so gilt bekanntlich nach M. Riesz für $p > 1$ die Ungleichung

$$M_p(r, v) \leq B_p^p M(r, u), \quad (1)$$

wobei Bp eine nur von p abhängige Konstante ist. Bei $p = 1$ gilt (1) bekanntlich nicht; Verf. gibt für diesen Fall die folgende wichtige Formel:

$$M_1(r, v) \leq A_q [M_1(r, u)]^q + \frac{c}{q} \int_{-\pi}^{\pi} |u(z)| \log \left[\frac{|u(z)|}{q} + 1 \right] d\theta, \quad (2)$$

wobei c eine absolute Konstante, $0 < q < 1$ und

$$A_q = \frac{2}{\cos \frac{1}{2} q \pi}$$

ist. Verf. beweist noch, daß man in (2) die Funktion $\log(t)$ durch eine andere Funktion $\delta(t) = O\{\log(t)\}$ nicht ersetzen könnte. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Wirtinger, Wilhelm: Über eine Minimalaufgabe im Gebiet der analytischen Funktionen. *Mh. Math. Phys.* **39**, 377–384 (1932).

Es wird bei gegebener (stetig diff.) Funktion $\Phi(x, y)$ nach einer im Gebiet g regulären Funktion $f(z)$ gefragt für die $\int_g |f - \Phi|^2 \partial x \partial y = \text{Min.}$ Die Extremalfunktion

wird bei Kenntnis der Greenschen Funktion des Gebietes explizit hergestellt und für sie das Eintreten des Min. nachgewiesen. Im Falle einer Kreisscheibe wird für eine reguläre Funktion Φ von $x - iy$ die Funktion $f(x) \equiv 0$. *G. Herglotz* (Göttingen).

Cauer, W.: The Poisson integral for functions with positive real part. *Bull. Amer. Math. Soc.* **38**, 713–717 (1932).

Verf. beweist für Funktionen $g(\lambda)$, die in der rechten λ -Halbebene regulär sind und dort einen nicht negativen Realteil haben, die Darstellung

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iy\lambda - 1}{iy - \lambda} d\nu(y) + C\lambda + k,$$

in welcher ν eine nicht abnehmende beschränkte Funktion, C eine nicht negative und k eine rein imaginäre Konstante ist. Unter der weiteren Voraussetzung, daß $g(\lambda)$ für reelle λ reell ist, gilt:

$$g(\lambda) = \lambda \left[C + \int_0^{\infty} \frac{d\psi(x)}{\lambda^2 + x} \right], \quad (*)$$

wo ψ eine nicht abnehmende Funktion ist. Umgekehrt folgt aus der letzten Darstellung, daß $g(\lambda)$ die angegebenen Eigenschaften hat. Den Ausgangspunkt des Beweises bildet eine von G. Herglotz angegebene Integraldarstellung für Funktionen, die im Innern des Einheitskreises regulär sind und dort einen nicht negativen Realteil haben. — Die Funktionen $g(\lambda)$, die die Darstellung (*) zulassen, spielen eine Rolle in der Theorie der Siebschaltungen. *E. Rothe* (Breslau).

Warschawski, Stefan: Über einen Satz von O. D. Kellogg. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* Nr **25**, 73–86 (1932).

Verf. beweist mit sehr einfachen funktionentheoretischen Hilfsmitteln den bekannten Satz von O. D. Kellogg (für den man bisher nur einen potentialtheoretischen Beweis kannte): Die in $|z| < 1$ reguläre Funktion $F(z)$ bilde $|z| < 1$ schlicht und konform auf ein Gebiet ab, dessen Begrenzung eine rektifizierbare Jordankurve sei, für deren Parameterdarstellung (s = Bogenlänge) $w = w(s) = x(s) + iy(s)$, die n te ($n \geq 1$) Ableitung $\frac{d^n w(s)}{ds^n} = w^{(n)}(s)$ existiere und der Hölderbedingung $|w^{(n)}(s+h) - w^{(n)}(s)| \leq k|h|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, — α, k Konstanten — genüge. Dann existiert $\frac{d^n F(z)}{dz^n} = F^{(n)}(z)$ überall in $|z| \leq 1$ und genügt auf $|z| = 1$ einer Hölderbedingung mit demselben α : $|F^{(n)}(e^{i\varphi_1}) - F^{(n)}(e^{i\varphi_2})| \leq H \cdot |\varphi_1 - \varphi_2|^\alpha$. Überdies ist $F'(z) \neq 0$ in $|z| \leq 1$. Verf. konstruiert zunächst für $n = 1$ für den beliebigen Randpunkt P eine „innere Vergleichskurve“ mit stetiger Tangente und von der Art, daß für die zugehörige Abbildungsfunktion in $|z| \leq 1$ der Differenzenquotient und sein reziproker Wert beschränkt bleibt. Hierdurch gelingt es ihm schließlich unter Verwendung

des Schwarzschen Lemmas die gleichmäßige Beschränktheit der Ableitung der Abbildungsfunktion in $|z| < 1$ zu zeigen. Hieraus folgert man dann leicht, daß die auf $|z| = 1$ stetige Randfunktion $v(e^{i\vartheta})$ von $\arccos F'(z)$ einer Hölderbedingung von ϑ mit dem Exponenten α genügt, und nach einem Satz von I. Priwaloff läßt sich daraus dieselbe Eigenschaft für $\log |F'(z)|$ und damit für $\log F'(z)$ und $F'(z)$ erschließen. Der Fall $n > 1$ wird durch Induktion und unter Verwendung desselben Priwaloffschen Satzes bewiesen.

E. Peschl (Jena).

Kobori, Akira: Über sternige und konvexe Abbildung. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 15, 267—278 (1932).

Der Verf. beweist: Aus $\sum_{\nu=2}^{\infty} \nu^2 |a_{\nu}| \varrho^{\nu-1} \leq 1$ folgt, daß die Potenzreihe $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ ($a_1 = 1$) und alle ihre Abschnitte den Kreis $|z| < \varrho$ konvex abbilden. Aus $\sum_{\nu=2}^{\infty} \nu |a_{\nu}| \varrho^{\nu-1} \leq 1$ folgt, daß sie und ihre Abschnitte $|z| < \varrho$ sternig abbilden. Aus diesen beiden Sätzen werden verschiedene Abschätzungen der Rundungs- bzw. Sternigkeitsschranke abgeleitet. — Die weiteren Betrachtungen der Arbeit sind unrichtig, da sie auf einer falschen Interpretation eines von A. Marx herrührenden Satzes beruhen.

K. Löwner (Prag).

Kobori, Akira: Über die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Potenzreihe einen Kreisbereich auf den schlechten konvexen oder sternigen Bereich abbildet. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 15, 279—291 (1932).

Die Arbeit bringt Beweise für die bekannten Kriterien für eine sternige bzw. konvexe Abbildung $w = f(z)$ in $|z| < 1$

$$\Re \frac{zf'}{f} > 0 \quad \text{bzw.} \quad \Re \left\{ 1 + z \frac{f''}{f'} \right\} > 0 \quad (|z| < 1)$$

(vgl. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie II. S. 109. Teubner 1913). — Der im § 3 der Arbeit bewiesene Satz, daß aus $\Re \frac{zf'}{f} > 0$ und $f'(z) \neq 0$ in $|z| < 1$ Schlichtheit der Abbildung folgt, ist nicht richtig, wie man am Beispiel $f(z) = z + z^2 + \frac{z^3}{3}$ sieht.

K. Löwner (Prag).

Lense, Josef: Über die konforme Abbildung durch die Besselfunktionen. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. H. 2, 61—70 (1932).

Als Hauptergebnis dieser Arbeit sind einige schöne Abbildungen zu betrachten, die das Verhalten der Besselfunktionen

$$J_{\nu}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

in der komplexen Ebene klarmachen. Es wird explizit auf die Fälle $\nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; $-1 < \nu < -\frac{1}{2}$ und $\nu = \frac{1}{2}$ eingegangen, und entsprechende Kurven $|J_{\nu}(z)| = \text{konst.}$ und $\arg J_{\nu}(z) = \text{konst.}$ skizziert.

W. Gontscharoff (Moskau).

Grunsky, Helmut: Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche. Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin 1, 95—140 (1932).

Die Grundlage der Untersuchung bildet eine allgemeine Ungleichung, die für sämtliche Funktionen $f(\zeta) = re^{i\varphi}$ gilt, welche in einem endlich vielfach zusammenhängenden Bereich \mathfrak{B} meromorph sind und dort endlich viele Null- und Unendlichkeitsstellen besitzen. Sie gibt eine untere Schranke für das Integral $\int_{\mathfrak{R}} \log r d\varphi$, erstreckt über den Rand \mathfrak{R} von \mathfrak{B} in positivem Sinne. Diese enthält von $f(\zeta)$ die ersten Laurentkoeffizienten in den Nullstellen und Polen der Funktion und die Umlaufszahlen (Gesamtzuwachs des Arkus) der Funktion längs der einzelnen Randkomponenten. Neben diesen Größen enthält die Schranke endlich viele Parameter, die von gewissen von \mathfrak{B} und der Lage der Nullstellen und Pole abhängigen Hilfsfunktionen herrühren. Durch dem

jeweils vorliegenden Problem angepaßte Spezialisierung derselben wird eine Reihe von neuen Abschätzungen erhalten, von denen einige hervorgehoben seien: 1. \mathfrak{B} enthalte $\zeta = 0$ und $\zeta = \infty$. $f(\zeta)$ vermittele eine schlichte Abbildung von \mathfrak{B} , und es sei $f(\infty) = \infty$, $f'(\infty) = 1$. Dann gibt es zu jedem ζ aus \mathfrak{B} zwei Zahlen $r(\zeta)$, $m(\zeta)$, von denen die erste positiv ist, so daß

$$|\log f'(\zeta) - m(\zeta)| \leq r(\zeta)$$

gilt. Unter $\log f'(\zeta)$ ist der bei $\zeta = \infty$ verschwindende Zweig zu verstehen. Zu jedem Wert $m(\zeta) + \tau r(\zeta)$ ($|\tau| = 1$) gibt es eine Funktion, so daß $\log f'(\zeta) = m(\zeta) + \tau r(\zeta)$ ist. Sie ist bis auf eine additive Konstante bestimmt und vermittelt die Abbildung auf die längs gewisser Bögen von logarithmischen Spiralen mit dem asymptotischen Punkt $f(\zeta)$ aufgeschlitzte Ebene. — Einen noch allgemeineren Satz hat Grötzsch bewiesen. Vgl. dies. Zbl. 5, 68 u. 69. 2. Bildet $s(\zeta)$ den Einheitskreis $|\zeta| < 1$ auf einen schlichten Bereich ab, der $s = \infty$ nicht enthält, so ist, falls $s(0) = 0$, $s'(0) = 1$ ist,

$$\left| \log \frac{s(\zeta)}{\zeta} + \log(1 - |\zeta|^2) \right| \leq \log \frac{1 + |\zeta|}{1 - |\zeta|},$$

$$\left| \log \frac{s'(\zeta)\zeta}{s(\zeta)} \right| \leq \log \frac{1 + |\zeta|}{1 - |\zeta|}, \quad |\log s'(\zeta) + \log(1 - |\zeta|^2)| \leq 2 \log \frac{1 + |\zeta|}{1 - |\zeta|}.$$

Die Logarithmen bedeuten jedesmal den für $\zeta = 0$ verschwindenden Zweig. Alle Schranken sind scharf. — In einem Schlußparagraphen wird das Extremumproblem gelöst, unter allen in \mathfrak{B} regulären Funktionen, die an zwei Stellen vorgeschriebene Werte annehmen, diejenige zu finden, für die der Flächeninhalt des Bildes ein Minimum wird. Für einfach zusammenhängende Bereiche ist es bereits früher von Kubota behandelt worden.

K. Löwner (Prag).

Possel, René de: Sur quelques propriétés de la représentation conforme des domaines multiplement connexes, en relation avec le théorème des fentes parallèles. Math. Ann. 107, 496—504 (1932).

Sei \mathfrak{B} ein Bereich endlich hohen Zusammenhangs, der $z = \infty$ enthält. In einer früheren Abhandlung (vgl. dies. Zbl. 3, 314) hat der Verf. gezeigt, daß unter den Funktionen $f(z)$, die \mathfrak{B} schlicht abbilden und im Unendlichen die Entwicklung $f(z) = z + \frac{a}{z} + \dots$ besitzen, die ihn auf einen von lauter zur reellen Achse parallelen Schlitzten begrenzten Bereich abbildende dem Realteil von a den maximalen Wert erteilt. In der vorliegenden Arbeit wird der genaue Wertebereich von a als ein abgeschlossener Kreis bestimmt. Das Resultat wird auch auf Bereiche unendlich hohen Zusammenhangs übertragen. Fast gleichzeitig ist Herr Grötzsch zu denselben Ergebnissen gekommen. (Vgl. dies. Zbl. 5, 68 u. 69.) Bei den Beweisen werden zwei Gleichmäßigkeitssätze benützt, die besonders hervorgehoben seien: a) Ist der Rand von \mathfrak{B} ganz im Innern des Einheitskreises gelegen und $f_0(z)$ die oben gekennzeichnete Extremalfunktion und a_0 der zugehörige Koeffizient von $\frac{1}{z}$, so ist

$$\text{b) } |a_0|^2 < 2\Re a_0.$$

Ferner ist

$$|J\{f_0(z) - z\}| < K |a_0|^{\frac{1}{2}}$$

für jeden Punkt a aus \mathfrak{B} . K bedeutet eine universelle Konstante. K. Löwner.

Schmidt, Erhard: Über den Milloux'schen Satz. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 25, 394—401 (1932).

Sei G ein vom Kreise $|z| = 1$ und von einem vom Mittelpunkt $z = 0$ bis zur Peripherie $|z| = 1$ führenden Jordanbogen C begrenztes Gebiet. Wenn $f(z)$ innerhalb G regulär und beschränkt ($|f| \leq 1$) ist, und wenn ferner $\lim_{|z| \rightarrow 1} |f| \leq \mu$ ($0 < \mu < 1$) in jedem innerhalb des Einheitskreises liegenden Punkt des Bogens C gilt, so ist nach dem Milloux'schen Satz $\log |f(z)| \leq k(1 - |z|) \log \mu$ für $|z| < 1$, wo k eine universelle, von der Wahl des Bogens C unabhängige Konstante ist. Für diesen Satz sind verschiedene Beweise gegeben worden; unentschieden blieb jedoch die Frage nach dem genauen (d. h. dem maximalen allgemeingültigen) Wert der Zahl k . Dieses Problem

wird jetzt vom Verf. durch eine neue, elegante Beweismethode erledigt. Es zeigt sich, daß die Milloux'sche Beziehung für $k \leq \frac{1}{\pi}$ universell besteht; läßt man aber den Bogen C mit einem Radius zusammenfallen, und definiert man $f(z)$ als diejenige analytische Funktion, deren absoluter Betrag auf C den Wert μ und auf der Peripherie den Wert 1 annimmt, so gilt dieselbe Beziehung nicht mehr für $k > \frac{1}{\pi}$. Der Nachweis dieses definitiven Resultats gründet sich auf eine Ungleichung, die mit Hilfe des Spiegelungsprinzips und des Koebe-Bieberbach-Faberschen Verzerrungssatzes hergeleitet wird. Diese Ungleichung ermöglicht einen Vergleich zwischen den absoluten Beträgen einer beliebigen, den Voraussetzungen des Satzes genügenden Funktion und der oben genannten Extremalfunktion. Zum Schluß stellt der Verf. einen Beweis folgender Behauptung in Aussicht: Auch dann, wenn den obigen Voraussetzungen noch die einschränkende Forderung hinzugefügt wird, daß die Funktion $f(z)$ sich im ganzen Kreis $|z| < 1$ regulär verhalten soll, läßt sich die Schranke $\frac{1}{\pi}$ durch keine größere ersetzen. — Ref. macht noch darauf aufmerksam, daß der Milloux'sche Satz (mit einem ungenauen Wert der Konstanten k) in einer allgemeinen Ungleichung als Spezialfall enthalten ist, die von Carleman herrührt und von ihm zum Beweis seines bekannten Satzes über die Endlichkeit der Anzahl der asymptotischen Werte einer ganzen Funktion endlicher Ordnung angewandt worden ist [Ark. Mat. Astron. Fys. 15, Nr 10 (1921), vgl. S. 4, Formel (7)].

Rolf Nevanlinna (Helsinki).

Shimizu, Tatsujirô: On the fundamental domains and the groups for meromorphic functions. I. Jap. J. Math. 8, 175—236 (1931).

Shimizu, Tatsujirô: On the fundamental domains and the groups for meromorphic functions. II. Jap. J. Math. 8, 237—304 (1932).

Shimizu, Tatsujirô: On the function-group for a meromorphic function. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 13, 297—301 (1931).

Shimizu, Tatsujirô: On the function-group for a meromorphic function. II. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 14, 36—40 (1932).

Diese Arbeiten unternehmen ein Studium der Wertverteilung einer in der punktierten Ebene meromorphen Funktion von der Seite der Riemannschen Fläche her; entsprechend einer Blatteinteilung der Fläche wird zunächst die Ebene in ein System von „normalen Polygonalgebieten“ bzw. von „Fundamentalgebieten“ zerlegt (diese Begriffe decken sich nicht); hierauf kann eine Klassifikation der transzendenten Singularitäten der Fläche gestützt werden, die mit der Iversens in Beziehung steht. Dann werden die Abbildungsfunktionen dieser Gebiete studiert, welche Punkte derselben Stellensorte einander zuordnen, also die Funktionen $z' = \xi(z)$, die $f(z') = f(z)$ erfüllen. (Dasselbe Problem wurde gleichzeitig mit Shimizu von Marty behandelt, vgl. dies. Zbl. 4, 118 und 5, 301; M. behandelt das Problem in weiterem Umfang, S. gibt mehr Einzelheiten für den eingangs genannten Fall; die Arbeiten haben manche Ergebnisse gemein.) Diese Abbildungsfunktionen bilden eine Gruppe, die Funktionsgruppe bei S., Automorphiegruppe bei M., die bei periodischen und automorphen Funktionen als lineare, diskontinuierliche Substitutionsgruppe bekanntlich grundlegendes Hilfsmittel zur Untersuchung dieser Funktionen ist. Es steht zu hoffen, daß man auch aus allgemeineren Automorphiegruppen Aufschlüsse über die betr. meromorphen Funktionen gewinnen kann. — Diese Gruppe wird nun (bes. in der 2. Abhandlung) eingehend untersucht, wobei allerdings das Gewicht noch im funktionentheoretischen Teil liegt: die Natur der Automorphiefunktionen zu erkennen. Gruppentheoretische Aussagen fehlen noch (auch bei Marty; dessen zweitgenannte Arbeit gibt einen Ansatz in dieser Richtung; durch Spezialisierung haben Speiser und R. Nevanlinna unter Benutzung der Gruppen Ergebnisse erzielt). Definitionsgebiet einer Automorphiefunktion ist die ganze Ebene bis auf eine kontinuumfreie Punktmenge, wobei für alle Singularitäten im Endlichen der Häufungsbereich ein endlicher

Punkt, für $z = \infty$ entweder $w = \infty$ oder aber die Vollebene ist. Verf. nennt als Hauptergebnis: Ist eine Automorphiefunktion in einem Gebiet n -deutig, so ist sie es in ihrem ganzen Verlauf; sie ist dann eine ganze algebraische (speziell: lineare) Funktion. Endlich vieldeutige transzendente Funktionen (ganze bzw. ganze algebroiden Funktionen) kommen als Automorphiefunktionen nicht in Frage (*). Eine nähere Untersuchung gilt dann (2. Abhandlung) den algebraischen Automorphiefunktionen, für die mit Hilfe der Iterationstheorie eine spezielle Struktur nachgewiesen werden kann. — Die 3. Abhandlung beschäftigt sich mit dem Fall unendlich vieldeutiger Automorphiefunktionen, deren Umkehrungen dieselbe Eigenschaft haben müssen, und für die der Häufungsbereich bei $z = \infty$ die Vollebene ist. Die 4. Note gibt einen Abriß des Inhalts der 2. Abhandlung ohne Beweise und einen neuen Beweis des Satzes (*) mit Hilfe einer Wachstumsabschätzung für eine ganze Funktion einer ganzen Funktion.

Ullrich (Marburg, Lahn).

Pompeiu, D.: Théorèmes d'existence pour les zéros des fonctions holomorphes. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 689—690 (1932).

Es werden einige dem Rouchéschen Satz ähnliche Sätze hergeleitet. Karamata.

Pompeiu, D.: Sur un théorème, analogue à celui de Rouché, relatif aux zéros des fonctions holomorphes. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 855—857 (1932).

Der analoge Satz lautet: Ist $g(z) = f(z) + \varphi(z)$ im Inneren von C regulär, und ist in C $f(z) = 0$, so muß auch $g(z)$ in C wenigstens eine Nullstelle besitzen, wenn außerdem überall auf C $\text{arc}\{f(z)/\varphi(z)\} \leq \frac{\pi}{2}$ ist. Dem Verf. ist entgangen, daß ein bekannter

Beweis des Rouchéschen Satzes ohne weiteres viel mehr ergibt. Es genügt nämlich, z. B. auf C überall $\text{arc} f(z) \equiv \pi + \text{arc} \varphi(z) \pmod{2\pi}$ vorauszusetzen, um schließen zu können, daß f und $f + \varphi$ die gleiche Anzahl Wurzeln in C besitzen. Denn dann ist

$$\int_C \frac{f' + \lambda \varphi'}{f + \lambda \varphi} dz \text{ für } 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ von } \lambda \text{ unabhängig.}$$

Karamata (Beograd). Fenchel (Göttingen).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Mises, Richard von: Théorie des probabilités. Fondements et applications. Ann. Inst. H. Poincaré 3, 137—190 (1932).

Drei Vorträge, die eine kurze Darstellung der Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf dem Begriffe des Kollektivs enthalten, den Beweis der zwei Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Theorie der Markoffschen Ketten mit den Anwendungen zur Begründung der statistischen Mechanik. A. Kolmogoroff.

Cantelli, F. P.: Una teoria astratta del calcolo delle probabilità. Giorn. Ist. Ital. Attuari 3, 257—265 (1932).

Es besteht bekanntlich eine Analogie zwischen dem Algorithmus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und demjenigen der Maßtheorie in der Mengenlehre. Der Verf. nimmt die Idee auf, die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Grund dieser Analogie systematisch aufzubauen, und zeigt an Hand einiger Beispiele, wie Aufgaben und Theoreme der Wahrscheinlichkeitsrechnung als solche der Maßtheorie aufgefaßt werden können.

Bruno de Finetti (Trieste).

Fréchet, M.: Osservazioni ad una nota di R. Cultrera sul concetto di convergenza di una successione di variabili casuali. Giorn. Ist. Ital. Attuari 3, 273—276 (1932).

Der Verf. legt nochmals die von ihm gegebene Definition der Konvergenz einer Folge aleatorischer Variablen dar, gegen welche Herr Cultrera einige Einwände gemacht hatte [Giorn. Ist. Ital. Attuari 3, 63—65 (1932); s. dies. Zbl. 4, 14]; die in Rede stehende Frage wird an Hand eines sehr einfachen Beispiels erklärt. Bruno de Finetti.

Cultrera, R.: Ancora su un concetto di convergenza di una successione di variabili casuali. Giorn. Ist. Ital. Attuari 3, 277—280 (1932).

Der Verf. nimmt in dieser Note Kenntnis von den Fréchetschen Bemerkungen (s. vorstehendes Ref.). Bruno de Finetti (Trieste).

De Franchis, M.: Alcune osservazioni sui fondamenti del calcolo delle probabilità. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **3**, 458—460 (1932).

Der Verf. bezeichnet als „Indifferenzgruppe“ diejenige Permutationsgruppe (arithm. Fall) bzw. Transformationsgruppe (geometr. Fall), durch welche gleichwahrscheinliche Ereignisse in ebenfalls gleichwahrscheinliche übergeführt werden. Die Festlegung einer solchen Gruppe ist gleichwertig mit der Festlegung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Mit dieser Auffassung will der Verf. eine Parallele zu den verschiedenen Geometrien ziehen, welche durch die in bezug auf die zugrunde gelegte Gruppe invarianten Eigenschaften gekennzeichnet werden. *Bruno de Finetti* (Trieste).

Brun, Viggo: Gauss' Verteilungsgesetz. *Norsk mat. Tidsskr.* **14**, 81—92 (1932) [Norwegisch].

Es wird eine besonders durchsichtige Ableitung der Gausssschen Verteilung mit Methoden, die von Maurer (*Math. Ann.* **47**), Sommerfeld (Boltzmann-Festschrift, Leipzig 1904) und Pólya (*Math. Ann.* **74**) herrühren, für den folgenden Fall gegeben: Bei einer Messung seien alle Fehler zwischen -1 und $+1$ gleichwahrscheinlich. Für die übrigen Fehler sei die Wahrscheinlichkeitsdichte 0. Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeitsdichte der Fehlersumme bei n Messungen. Diese Dichte wird wie bei Sommerfeld exakt durch das bestimmte Integral

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n \cos(xt) dt$$

dargestellt, das für große n näherungsweise durch die Gaussssche Exponentialfunktion ersetzt werden kann. *W. Fenchel* (Göttingen).

Frisch, Ragnar: On the use of difference equations in the study of frequency distributions. *Metron* **10**, Nr 3, 35—59 (1932).

Von der Guldbergischen Abhandlung (dies. Zbl. **3**, 17) ausgehend, versucht Verf. die Anwendung von Differenzgleichungen auf dem Gebiete der Verteilungsfunktionen statistischer Reihen zu erweitern. f_x sei die Verteilungsfunktion, gegeben für die Punkte $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$. Es ist dann immer möglich, solche Zahlen P_x und Q_x anzugeben, daß die Verteilung durch die Differenzgleichung $P_x f_x + Q_{x+1} f_{x+1} = 0$ charakterisiert ist. Dieser Ausgangspunkt bietet eine gewisse Ähnlichkeit mit einem Thieleschen Gedankengang (T. N. Thiele: Interpolationsrechnung, Leipzig 1909, 116), wo der Begriff qualifizierte Differenzen aufgestellt wird, was jedoch dem Verf. entgangen zu sein scheint. Die Abhandlung des Verf. ist als eine Vorstudie anzusehen, numerische Anwendungen werden nicht gegeben. *Burrau* (Kopenhagen).

Hagstroem, K. G.: Alcune formule appartenenti alla statistica rappresentativa. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **3**, 147—159 (1932).

Betrachtet man einen Kollektivgegenstand C , dessen Elemente durch x_1, x_2, \dots, x_N gekennzeichnet sind ($\sum x_i = 0$, wo die Summe über alle $i = 1, 2, \dots, N$ zu erstrecken ist), und wählt man daraus einen Probekollektivgegenstand c von n Elementen: $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ aus und bezeichnet man mit Sx_i die Summe $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_n}$, so erhält man für das arithmetische Mittel $\mu = \frac{1}{n} Sx_i$ und für die Dispersion $A = \frac{1}{n} Sx_i^2 - \mu^2$.

Wendet man in bekannter Weise das Symbol E für die mathematische Erwartung einer Zufallsveränderlichen an, so ist

$$\sigma_n^2 = E\{(\mu - E(\mu))^2\} = \frac{N-n}{n(N-1)} \sigma^2; \quad \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum x_i^2;$$

$$\bar{\sigma}_n^2 = E\{(A - \sigma^2)^2\} = \frac{1}{N} (A Q_4 - B \sigma^4); \quad Q_4 = \frac{1}{N} \sum x_i^4.$$

Die vollständigen Ausdrücke für die Koeffizienten A, B werden in der Arbeit ermittelt; durch den Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ gelangt man zu brauchbaren Näherungswerten:

$$A^{(\infty)} = \frac{(n-1)^2}{n^3}, \quad B^{(\infty)} = \frac{n^2 - 5n + 3}{n^2}. \quad \text{— Für die Zufallsveränderliche } A_1 = H A,$$

$H = n(N-1) : N(n-1)$, ist $E(A_1) = \sigma^2$; setzt man $\sigma^2 \doteq A_1$, so gewinnt man $\sigma_n^2 \doteq \frac{N-n}{N(n-1)} A_1$. Anschließend werden die Koeffizienten $A_0, B_0; A_1, B_1$ in den Ausdrücken

$$\bar{\sigma}^2 = E \left[\left(A - \frac{\sigma^2}{H} \right)^2 \right] = A_0 \varrho_4 - B_0 \sigma^4,$$

$$\bar{\sigma}^2 = E \{ [A_1 - E(A_1)]^2 \} = A_1 \varrho_4 - B_1 \sigma^4$$

ermittelt, der Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ ergibt

$$A_0^{(\infty)} = \frac{(n-1)^2}{n^3}, \quad B_0^{(\infty)} = \frac{(n-1)(n-3)}{n^3};$$

$$A_1^{(\infty)} = \frac{1}{n}, \quad B_1^{(\infty)} = \frac{n-3}{n(n-1)}.$$

Die Bedeutung der erhaltenen Ergebnisse für die Anwendungen ist aus den obigen Formeln unmittelbar ersichtlich.

F. Knoll (Wien).

Cámara, Sixto: Grundlagen der allgemeinen Theorie vielfacher Korrelation. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 6, 249–262 (1931); 7, 7–21, 71–77 u. 97–112 (1932) [Spanisch].

Ist C_k eine statistische Masse, welche als Trägerin von k Merkmalklassen mit den Merkmalen a_{ij} ; $i = 1, 2, 3, \dots, k$ (i Zeiger der Klasse) $j = 1, 2, \dots, n_i$ (j Zeiger des Merkmals innerhalb der i -ten Klasse) untersucht werden soll, und ist jedes Element der Masse C_k durch das gleichzeitige Auftreten je eines Merkmals aus jeder der k Klassen gekennzeichnet, d. h. durch das Merkmal $a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ki_k}$; ist die relative Häufigkeit des Merkmals $a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ki_k}$ durch $p_{i_1 i_2 \dots i_k}$ gegeben, so kann man zu einer geometrischen Charakterisierung der Masse C_k gelangen, indem man zunächst jedem Merkmal a_{ij} eine Zahl x_{ij} zuordnet und sodann dem komplexen Merkmal $a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ki_k}$ den Punkt $(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \dots, x_{ki_k})$ mit der Belegung $p_{i_1 i_2 \dots i_k}$ in einem k -dimensionalen euklidischen Raume entsprechen läßt. Sowie das entstehende Punktgitter die Gesamtmasse kennzeichnet, so entsprechen Teilgittern bestimmte ausgezeichnete Teilmassen; zwischen den Belegungen dieser Teilmassen bestehen eine Reihe von wichtigen Zusammenhängen, deren Wiedergabe an dieser Stelle nicht möglich ist. Wichtige Sätze ergeben sich für die Schwerpunkte der verschiedenen Teilgitter. Die angedeuteten Begriffsbildungen erweisen sich natürlich bei der statistischen Behandlung von Kollektivgegenständen besonders geeignet. Die Grundfrage bei der mehrfachen Korrelation ist das Problem der Existenz einer in den k -dimensionalen Raum eingebetteten ebenen oder gekrümmten Mannigfaltigkeit der Dimension $h < k$, auf welcher das Punktgitter von C_k starr oder locker (genähert) gelagert ist. Die Untersuchungen für starre und lockere Gitter werden unter Verallgemeinerung der Bezeichnungen und Methoden, die bei der einfachen Korrelation Verwendung finden, unter Heranziehung der neuen Begriffe durchgeführt. Formeln und Sätze können hier wegen ihres Umfanges nicht wiedergegeben werden.

F. Knoll (Wien).

Surico, L. A.: Su una formula approssimata per il calcolo della probabilità di un dato scarto nello schema di Bernoulli, in casi di dissimmetria. Giorn. Ist. Ital. Attuari 3, 376–390 (1932).

Die bekannte Grenzformel von Poisson für Wahrscheinlichkeiten „seltener Ereignisse“ und eine neue von Castelnuovo vorgeschlagene Näherungsformel werden in bezug auf Restglied und Anwendbarkeitsbereich untersucht und miteinander verglichen. Zahlenbeispiele.

A. Khintchine (Moskau).

Romanovsky, V.: Due nuovi criteri di controllo sull'andamento casuale di una successione di valori. Giorn. Ist. Ital. Attuari 3, 203–222 (1932).

Der Verf. untersucht in dieser Note die Länge l der Abschnitte einer Versuchsreihe, d. h. die Länge derjenigen Teile der Versuchsreihe, die mit dem Eintreten des günstigen Ereignisses aufhören; unter der Voraussetzung, daß die betrachteten Ereignisse unabhängig und daß ihre Wahrscheinlichkeiten konstant ($= p$) sind, ergibt

sich für den Erwartungswert von l $E(l) = 1/p$ und für die quadratische Abweichung $\sigma(l) = (1/p)\sqrt{1-p}$. Es wird nun gezeigt, daß bei einer großen Anzahl von Versuchen die empirischen Mittelwerte praktisch mit den vorher theoretisch bestimmten übereinstimmen, und es wird in Vorschlag gebracht, diese Eigenschaft als Kriterium für die Kontrolle des „aleatorischen Verlaufes“ einer Versuchsreihe zu verwenden. — Der vorhergehende Vorgang wird dann auf eine Versuchsreihe mit 3 Alternativen erweitert; diese Erweiterung stellt aber nur scheinbar eine Verallgemeinerung des Falles mit 2 Alternativen dar. *Bruno de Finetti* (Trieste).

Pearson, Egon S.: The percentage limits for the distribution of range in samples from a normal population. ($n \leq 100$.) *Biometrika* 24, 404—417 (1932).

● **Dubourdieu, J.:** *Mathématiques financières. Préface de Henri Galbrun.* (Collect. Armand Colin. Sect. de math. Nr. 154.) Paris: Armand Colin 1932. 219 S. u. 9 Fig. Frs. 10.50.

Koepler, Hans: Zur Höhe der Durchschnittsprämien. *Versicherungsarch.* 3, 377 bis 380 (1932).

Friedli, Werner: Mathematische Untersuchungen über die in unterjährigen Raten zahlbaren Renten. *Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H.* 27, 107—170 (1932).

Die erste dieser Reihen wurde schon von Woolhouse gegeben, der Restglied von Poterin du Motel (*Encyclop. scienc. math.* I 4, 4, 527) untersucht und andere Formen des Restgliedes, unter Anwendung der Eulerschen Summationsformel von Seliwanoff (*Differenzenrechnung*, Leipzig 1904, 57) und Markoff (*Differenzenrechnung*, Leipzig 1896, 120) aufgestellt. Verf. sammelt die hierher gehörenden Gedankengänge und gibt auch einige numerische Illustrationen der erreichten Genauigkeiten. *Burrau* (Kopenhagen).

Pearson, Karl: Experimental discussion of the (χ^2, P) test for goodness of fit. *Biometrika* 24, 351—381 (1932).

Schwegler, Hermann: Neue Beiträge zur Bausparmathematik. *Versicherungsarch.* 3, 390—408 (1932).

Numerische und graphische Methoden.

Apt, F.: Nomogramm zur Bestimmung der komplexen Wurzeln einer beliebigen Gleichung vierten Grades. *Z. angew. Math. Mech.* 12, 382—383 (1932).

Jeffreys, Harold: On the theory of errors and least squares. *Proc. Roy. Soc. London A* 138, 48—55 (1932).

In der Theorie der Beobachtungsfehler wird gewöhnlich über die apriorische Wahrscheinlichkeit bestimmter Werte des Genauigkeitsmaßes h keine Voraussetzung gemacht. Verf. zeigt nun, daß, auch im Falle der Gültigkeit des gewöhnlichen Fehlergesetzes, die Wahrscheinlichkeit, daß h in das Intervall $h \dots h + dh$ fällt, proportional mit dh/h angesetzt werden muß. Dies wird streng abgeleitet aus dem Satz, daß die Wahrscheinlichkeit, daß von drei Beobachtungen die dritte zwischen die beiden ersten fällt, gleich $1/3$ sei, vorausgesetzt, daß keine Annahmen über die Häufigkeit von Fehlern bestimmten Betrages vorliegen. — Dies Resultat wird auf die Theorie der Methode der kleinsten Quadrate angewandt, was zu einer Modifikation der gewöhnlich gültigen Formeln für die Fehlerwahrscheinlichkeit und den mittleren Fehler führt, die besonders bei geringer Anzahl der Beobachtungen merklich ist, während bei wachsender Beobachtungszahl die klassischen Formeln angenähert werden. *K. Stumpf*.

Merten, W.: Kleinere Bemerkungen zur Methode der kleinsten Quadrate. *Z. Vermessgswes.* 61, 626—633 (1932).

Eine frühere Arbeit (*Z. Vermessgswes.* 1931; dies. Zbl. 2, 203) des Verf., die die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelte, wird hier fortgesetzt und zum Abschluß gebracht. Dieser zweite Teil

behandelt die Fälle vermittelnder Beobachtungen, wo die Funktionen der zu ermittelnden Größen nicht linear sind, sowie den Fall der Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

K. Stumpff (Breslau).

Vercelli, F.: *La perequazione nell'analisi delle curve.* Boll. Com. Naz. Ital. Geodes. Geofis., II. s. 2, 129—133 (1932).

Der Vorgang der Ausgleichung oder Glättung einer empirisch gegebenen Abhängigkeit stimmt im wesentlichen mit gewissen Sonderfällen überein, die sich bei der Analyse periodischer Abhängigkeiten ergeben. Das sehr häufig angewendete Verfahren der Ersetzung eines Funktionswerts durch das mit verschiedenen Gewichten a genommene arithmetische Mittel der Nachbarwerte:

$$a_0 y_m + a_1 (y_{m-1} + y_{m+1}) + a_2 (y_{m-2} + y_{m+2}) + \cdots + a_n (y_{m-n} + y_{m+n})$$

bewirkt hier die Multiplikation mit dem „Erweiterungsfaktor“

$$M = a_0 + 2a_1 \cos 2\pi/T + 2a_2 \cos 2 \cdot 2\pi/T + \cdots + 2a_n \cos n \cdot 2\pi/T,$$

wo T die Periode bedeutet. Bei der Glättung nimmt man die Gewichte a beliebig an, und M ist durch sie sowie durch die Periode T bestimmt. Wenn man aber umgekehrt die Werte des Faktors M für n Werte der Periode T vorschreibt, so lassen sich daraus die Gewichte a bestimmen und man kommt auf einen Vorgang der Analyse periodischer Abhängigkeiten.

L. Schrutka (Wien).

Werkmeister, P.: *Beitrag zur Bestimmung der Gleichung der plausibelsten Kurve einer fehlerzeigenden Punktreihe.* Z. Vermessgswes. 61, 727—738 (1932).

Werkmeister, P.: *Beitrag zur Bestimmung der Konstanten eines Polarplanimeters.* Z. Instrumentenkde 52, 473—479 (1932).

Zur Ergänzung der Lehrbuchliteratur werden die verschiedenen Methoden der Konstantenbestimmung eines Polarplanimeters mit Pol innerhalb und außerhalb der zu bestimmenden Fläche, insbesondere die Fehlerquellen und die erreichbare Genauigkeit ausführlich behandelt und durch Zahlenbeispiele erläutert. Es ergibt sich, daß die Genauigkeit der Flächenbestimmung mit Pol innerhalb und außerhalb annähernd gleich ist.

G. Koehler (Erfurt).

Werkmeister, P.: *Ergebnisse der Untersuchung von fünf Ottsehen Polarplanimetern mit Grundkreis gleich Null.* Z. Instrumentenkde 52, 528—529 (1932).

Walther, A.: *Neue Potenzplanimeter zur Bestimmung von $\oint y^2 dx$ und $\oint \sqrt{y} dx$.* Z. Vermessgswes. 61, 665—668 (1932).

Apraxine, Nicolas: *Machine à calculer mue électriquement.* C. R. Acad. Sci., Paris 195, 857—858 (1932).

● **Caley, E. R.:** *Analytical factors and their logarithms.* London: Chapman & Hall, Ltd. 1932. 12/6.

● **Castle, F.:** *Fourfigure mathematical tables.* London: Macmillan & Co. 1932. 56 S. 1/3.

Deweek, M.: *Sur la nomographie des équations à quatre variables.* Mathesis 46, 401—408 (1932).

Geometrie.

● **Technische Übungsaufgaben für darstellende Geometrie.** Hrsg. v. Erwin Kruppa. Unter Verwendung d. gleichnamigen Aufgabensamml. v. Emil Müller u. Anton E. Mayer. Mappe 2. Leipzig u. Wien: Franz Deuticke 1933. Blatt 13—24.

Kokotsakis, A.: *Über bewegliche Polyeder.* Math. Ann. 107, 627—647 (1932). Etwas erweiterte Übersetzung der in diesem Zbl. 5, 178 referierten griechischen Arbeit.

Cohn-Vossen (Köln).

Coxeter, H. S. M.: *The densities of the regular polytopes. II.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 509—521 (1932).

Es wird eine genauere Definition der Art (density) eines regulären Polytopes gegeben (s. dies. Zbl. 1, 288). Sie wird nämlich als diejenige Zahl definiert, die angibt,

wie oft die umschriebene Hyperkugel überdeckt wird, wenn man das Orthoschema an seinen Seiten spiegelt. Es gelingt hiermit, die regulären Polyeder auf eine neue Weise herzuleiten. Ferner wird untersucht, wann die Begrenzungsfiguren eines Polytopes die Eckfiguren eines anderen Polytopes sein können (vgl. dies. Zbl. **1**, 288).

J. J. Burckhardt (Zürich).

Lidonnici, Alfonso: Gli arbeli. Period. Mat., IV. s. **12**, 253—269 (1932).

In dem von Archimedes herrührenden, von Täbit ibn Qurrah redigierten Liber Assumptorum werden u. a. einige Eigenschaften des Arbelos (eine Figur bestehend aus drei Halbkreisen, deren Durchmesser so auf einer Geraden liegen, daß die Summe zweier von ihnen dem dritten gleich ist und die der nämlichen Halbebene angehören) behandelt. Verf. teilt drei dieser Archimedischen Sätze mit, reproduziert vollständig die von Sassoli (Arbelo di Archimede, Bologna 1887) gefundenen Eigenschaften der Figur und zeigt, wie man durch affine Transformation zu den regulären elliptischen Arbelen gelangt, in denen die Halbkreise durch Halbellipsen gleicher Exzentrizität ersetzt sind. Der archimedische Arbelos gehört dieser Klasse als Spezialfall an.

Dijksterhuis (Oisterwijk).

Buzano, Piero: Studio di alcuni sistemi ∞^1 di affinità piane. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **65**, 875—888 (1932).

In einer eingliedrigen Gruppe ebener projektiver Transformationen besitzen die Bahnkurven der verschiedenen Punkte der Ebene folgende Eigenschaft: Wenn P, Q Punkte einer Bahnkurve C sind, so läßt die Projektivität der Gruppe, die P in Q verwandelt, der Tangente an C in P die Tangente an C in Q entsprechen. Diese Eigenschaft kommt auch ∞^1 Systemen von Transformationen zu, die keine Gruppe bilden. Der Verf. stellt sich folgende zwei Aufgaben, die ∞^1 Systeme ebener Affinitäten betreffen: Es sollen alle ∞^1 Systeme ebener Affinitäten bestimmt werden, die die Identität enthalten, und die so beschaffen sind, daß die Affinität des Systems, welche P in Q verwandelt, immer der Tangente in P der Bahnkurve von P die Tangente in Q der Bahnkurve entweder von P oder allgemeiner von Q entsprechen läßt. (Es ist zu bemerken, daß die Bahnkurven von P und Q im allgemeinen voneinander verschieden sind, auch wenn P, Q entsprechende Punkte in einer Affinität des Systems sind.) Sind:

$$X = a(t)x + b(t)y + c(t), \quad Y = d(t)x + e(t)y + f(t)$$

(wobei $a(0) = e(0) = 1$, $b(0) = c(0) = d(0) = f(0) = 0$) die Gleichungen der gegebenen Affinitäten, so lauten die analytischen Bedingungen für die zwei gestellten Aufgaben folgendermaßen:

$$\frac{(a'_0 x + b'_0 y + c'_0)a + (d'_0 x + e'_0 y + f'_0)b}{a'x + b'y + c'} = \frac{(a'_0 x + b'_0 y + c'_0)d + (d'_0 x + e'_0 y + f'_0)e}{d'x + e'y + f'}$$

$$\frac{(a'_0 x + b'_0 y + c'_0)a + (d'_0 x + e'_0 y + f'_0)b}{a'_0(ax + by + c) + b'_0(dx + ey + f) + c'_0} = \frac{(a'_0 x + b'_0 y + c'_0)d + (d'_0 x + e'_0 y + f'_0)e}{d'_0(ax + by + c) + e'_0(dx + ey + f) + f'_0}$$

(wobei $a' = \frac{da}{dt}$, $a'_0 = \left(\frac{da}{dt}\right)_{t=0}$, usw.). Die erste Frage führt zu eingliedrigen Affinitätsgruppen und zu ∞^1 Systemen homologischer Affinitäten, die alle dasselbe unendlich weite Zentrum haben (was geometrisch evident ist). Die Lösung der zweiten Aufgabe ist viel komplizierter und besteht aus zahlreichen Fällen, die hier nicht beschrieben werden können und die mit einer langen und sorgfältigen Diskussion gefunden werden.

E. G. Togliatti (Genova).

Villa, Mario: Sulla molteplicità e sulle tangenti della curva Hessiana. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **65**, 625—641 (1932).

Als Anwendung von Begriffen und Methoden, die in einer früheren Arbeit desselben Verf. entwickelt worden sind (siehe dies. Zbl. **3**, 71; **4**, 269; **5**, 116), werden hier die Singularitäten der Hesseschen Kurve H einer ebenen algebraischen Kurve C studiert. Nach Erklärung des betreffenden allgemeinen Satzes werden folgende Fälle betrachtet: 1. Einfache und Doppelpunkte der Hesseschen Kurve H , die der Fundamentalkurve C nicht angehören. 2. Einfache und Doppelpunkte der Kurve H , die in einfache Punkte

der Kurve C fallen. 3. Fälle, wo ein s -facher Punkt der Kurve C für H eine der Multiplizitäten $\sigma = 3s - 4$, $\sigma + 1$, $\sigma + 2$ besitzt. Immer werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen angegeben, damit H die gewünschte Multiplizität habe, und dann werden die betreffenden Tangenten von H konstruiert. Einige der gefundenen Sätze waren bekannt.

E. G. Togliatti (Genova).

Maroni, Arturo: *Sulle serie algebriche dotate di punti multipli variabili, appartenenti ad una curva algebrica.* Mem. Accad. Ital., Mat. 3, Nr 2, 1—13 (1932).

L'auteur établit une formule donnant le nombre de groupes de $r + 1$ points communs à un groupe d'une série linéaire g_n^r et à un groupe d'une série algébrique γ_m^1 ayant des points multiples variables (m_1 points s_1 -uples, ..., m_t points s_t -uples). Cette formule généralise celle de Schubert, valable dans le cas où γ_m^1 n'a pas de points multiples variables. La démonstration fait intervenir le principe de correspondance de Cayley-Brill et procède par récurrence sur t . L'auteur étend aussi le critérium d'équivalence de Castelnuovo: soit $\gamma_{m_i}^1$ la série algébrique constituée par les groupes de m_i points de multiplicité s_i pour γ_m ; désignons par d_{ii} le nombre des points doubles de $\gamma_{m_i}^1$, par d_{ik} le nombre des points communs à un groupe de $\gamma_{m_i}^1$ et au groupe correspondant de $\gamma_{m_k}^1$ (cad. appartenant au même groupe de γ_m^1). L'auteur montre que l'expression $\sum_{i,k=1}^t s_i s_k d_{ik}$ admet un maximum, et que la condition nécessaire et suffisante pour que ce maximum soit atteint est que la série γ_m^1 soit formée de groupes équivalents.

P. Dubreil (Lille).

Black, Amos Hale: *Types of involutorial space transformations associated with certain rational curves.* Trans. Amer. Math. Soc. 34, 795—810 (1932).

If $n = 3$ and $m < 6$, or if $n = 4$ and $m < 4$, it is possible to have pencils of surfaces of order n having a base curve r of multiplicity $n - 2$ and of order $m > 1$. If r is rational, then such pencils define involutorial space Cremona transformations in the following manner: The surfaces of the pencil are referred projectively to the points of r ; then the homologous of a point P in space is defined as the point P' in which the line PO joining P to the point O on r corresponding to the surface of the pencil on P meets this surface outside of P and O . Each such transformation leaves invariant the surfaces of the pencil and belongs to the complex of lines incident with r . These transformations are studied in detail as to the images of their fundamental elements, their parasitic lines, etc.

O. Zariski (Baltimore).

Carroll, Evelyn Teresa: *Systems of involutorial birational transformations contained multiply in special linear line complexes.* Amer. J. Math. 54, 707—717 (1932).

A detailed study of a class of involutorial space transformations defined in the same manner as in the paper by Black (see preceding review), with the following modifications: 1) $m = 1$, and hence n can be arbitrary; 2) instead of a $(1 - 1)$ correspondence between the surfaces of the pencil and the points of r an arbitrary $(k, 1)$ correspondence is used, which of course does not destroy the $(1 - 1)$ and involutorial character of the space transformation.

O. Zariski (Baltimore).

Semple, J. G.: *Note on rational normal quartic curves.* J. London Math. Soc. 7, 266—271 (1932).

Eine Hyperfläche 2. Ordnung Ω eines Raumes S_5 kann auf einem S_4 so abgebildet werden, daß ihre Hyperebenenschnitte die $\infty^5 V_3^2$ des S_4 als Bilder haben, die eine rationale normale C^4 enthalten. In dieser Darstellung entsprechen den Ebenen eines Systems S auf Ω die Ebenen, die C^4 dreimal schneiden, und den Schnittkurven von Ω mit den Ebenen des S_5 die rationalen normalen Kurven vierter Ordnung, die mit C^4 sechs Punkte gemein haben. Die Betrachtung von zwei Ebenen ω, ω' , die zu Ω polar sind, und die Eigenschaft, daß jede Ebene des Systems S , die ω schneidet, auch ω' schneiden muß, führen in sehr übersichtlicher Weise zu dem bekannten Satze, daß die Ebenen, die C^4 dreimal schneiden und die eine andere durch sechs Punkte $A_1 A_2 \dots A_6$ von C^4 hindurchgehende ähnliche C_1^4 einmal schneiden, noch eine dritte durch dieselben

6 Punkte von C^4 hindurchgehende ähnliche C_2^4 einmal schneiden müssen. Die Kurven C, C_1, C_2 bilden zusammen die übrige Schnittlinie von drei V_3^3 , die $A_1 A_2 \dots A_6$ als Doppelpunkte haben (und die alle die 15 Geraden $A_i A_j$ enthalten), und umgekehrt; es folgt daraus die Symmetrie der Konfiguration der Kurven C, C_1, C_2 . Die birationale Transformation mit den Gleichungen $\varrho x'_i = 1/x_i$, wo die Punkte $A_1 A_2 \dots A_6$ als Fundamentalpunkte der Koordinaten gewählt werden, liefert eine Eigenschaft der drei Systeme von Geraden, die auf einer Determinanten- V_3^3 liegen. Schließlich einige besondere Fälle; und die Anwendung zur Bestimmung der Anzahl der rationalen normalen C^4 , die drei gegebene Geraden je zweimal schneiden und die durch r gegebene Punkte hindurchgehen und s gegebene Ebenen je dreimal schneiden in den Fällen, wo $r=3, s=0$; $r=2, s=1$; $r=1, s=2$ ist (es gibt immer eine einzige Lösung). *E. G. Togliatti.*

Welchman, W. G.: Additional note on plane congruences and fifth incidence theorems. Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 416—420 (1932).

Die Darstellung auf einem Raume S_3 einiger rationalen V_3 , die von J. A. Todd betrachtet worden sind (s. dies. Zbl. 4, 18) und die von ∞^2 Geraden überdeckt werden, führen auch zu den dualen ∞^2 Ebenensystemen des Raumes S_4 . Es sind sechs Ebenensysteme 2. Ordnung mit den Klassenwerten bzw. 7, 6, 5, 4, 3, 6. Das erste besteht aus Ebenen, die eine Kurve C^{10} (mit dem Geschlecht 3) dreimal und eine Gerade einmal schneiden. Die anderen Systeme, die hier nicht einzeln beschrieben werden können, oder einige ihrer besonderen Fälle, waren schon vom Verf. studiert worden (s. dies. Zbl. 5, 79). Das letzte System ist das vielbehandelte System der ∞^2 Ebenen, die zwei rationale normale C^4 , mit sechs gemeinsamen Punkten, bzw. dreimal und einmal schneiden (s. unten). *E. G. Togliatti (Genova).*

Telling, H. G.: Three related quartic curves in four dimensions. Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 403—415 (1932).

Babbage, D. W.: Extension of a theorem of C. G. F. James. Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 421—426 (1932).

Wenn zwei rationale normale Kurven 4. Ordnung eines vierdimensionalen Raumes, C, C_1 , sechs Punkte gemein haben, so müssen die ∞^2 Ebenen die C dreimal und C_1 einmal schneiden noch eine dritte ähnliche durch dieselben sechs Punkte hindurchgehende Kurve C_2 einmal schneiden. Und die Konfiguration der drei Kurven C, C_1, C_2 ist eine symmetrische. Dieser von C. G. F. James bewiesene Satz wird hier wieder bewiesen und verschiedenartig verallgemeinert. — H. G. Telling macht gleichzeitig die Darstellung der Punkte einer Geraden auf die Punkte einer kubischen Raumkurve C^3 und auf die Punkte einer rationalen normalen Γ^4 . Die ∞^1 binären kubischen Formen, die mit einer gegebenen binären biquadratischen Form apolar sind, stellen sich im S_3 mit den Schnitten von C^3 mit den Ebenen durch eine Gerade a dar, und im S_4 mit den Ebenen die C^4 dreimal schneiden und einen Punkt α enthalten. Man bekommt so eine eindeutige Beziehung zwischen den Punkten α des S_4 und den Geraden a des S_3 . In dieser Beziehung entsprechen den beiden Geradenscharen einer Fläche 2. Ordnung Q des S_3 zwei rationale normale Kurven C_1^4, C_2^4 , die mit C^4 dieselben 6 Punkte gemein haben; die Tangentialebenen von Q führen zu den ∞^2 Ebenen, die C dreimal und C_1 einmal schneiden und die daher C_2 noch einmal schneiden müssen (für die Konstantenabzählung, die zur Vervollständigung des Beweises hier nötig wäre, s. unten). Es werden besondere Fälle betrachtet; und es werden auch die Enveloppe all jener Ebenen sowie die benutzten Darstellungen weiterstudiert und diskutiert. Weiter kann man die Geraden des obigen S_3 mit den Punkten einer V_4^2 des S_5 wie üblich darstellen; die betreffende Konfiguration des S_5 wird direkt gefunden. Am Ende eine Verallgemeinerung des Satzes von James zu drei Regelscharen 4. Ordnung in einem S_5 , die eine und dieselbe elliptische Kurve C^6 enthalten. — D. W. Babbage beweist zunächst wieder einen Satz von L. M. Brown über die Darstellung der $\infty^{k+1} S_k$, die eine rationale normale C^n ($k+1$)-mal schneiden, auf die Punkte einer rationalen $V_{k+1}^{(n-k)k+1}$, deren Hyperebenen Schnitte alle V_k^{n-k} eines S_{k+1} als Bild haben. Dann betrachtet er in einem Raume

S_{2n} zwei rationale normale Kurven C, C_1 , die $2n + 2$ Punkte gemein haben; die Räume S_n , die C $(n + 1)$ -mal und C_1 einmal schneiden, müssen noch eine dritte ähnliche durch dieselbe $2n + 2$ Punkte hindurchgehende Kurve C_2 einmal schneiden. Zum Beweise werden die Gruppen von $n + 1$ Punkten auf C als Wurzeln von Gleichungen $(n + 1)$ -ten Grades betrachtet und auf den Punkten eines S_{n+1} dargestellt; den S_{n+1} , die C $(n + 1)$ -mal schneiden, entsprechen so die Punkte im S_{n+1} ; den Geraden des S_{n+1} entsprechen ∞^1 jener S_n , die einen Kegel bilden; und die Spitze des Kegels wird jener Geraden zugewiesen. Man gewinnt so eine der Tellingschen ganz ähnliche Darstellung: eine V_2^3 des S_{n+1} führt zu den Kurven C_1, C_2 usw. Wenn $n = 2$, können die Ebenen, die C dreimal und C_1, C_2 je einmal schneiden, als diejenigen Ebenen betrachtet werden, die C dreimal schneiden und einem linearen Ebenenkomplex gehören (s. auch oben bei Telling, S. 411). Als weitere Verallgemeinerung betrachtet Verf. die S_n eines S_{2n} , die die kanonische Kurve C^{4n} des S_{2n} $(n + 2)$ -mal schneiden: solche S_n müssen alle eine weitere Kurve Γ einmal schneiden.

E. G. Togliatti (Genova).

Gambier, Bertrand: Surfaces réglées algébriques et leurs singularités. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 745—747 (1932).

Einige Bemerkungen über die mehrfachen Kurven der Regelflächen 4. und höherer Ordnung. Die von W. L. Edge gegebene Klassifizierung (vgl. dies. Zbl. 1, 404) wird dadurch etwas vervollkommenet.

Cohn-Vossen (Köln).

Del Re, Maria: Degli spazi osculatori o corosculatori ad una $(h - 1)$ -varietà dello (h) -spazio. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 2, 7—11 (1932).

Als „oskulierende Ebenen“ einer V_{h-1}^n in einem Raume S_h betrachtet Verf. folgende zwei Typen von Ebenen: 1. die Ebenen, die durch einen allgemeinen Punkt T der V_{h-1}^n hindurchgehen und den Kegel V_{h-2}^2 der in P dreipunktigen Tangenten berühren; 2. die Ebenen, die durch T hindurchgehen und dem Kegel V_{h-2}^2 selbst angehören. Dual besitzt V_{h-1}^n zwei Typen von „dual-oskulierenden“ S_{h-3} (S_{h-3} „corosculatori“).

E. G. Togliatti (Genova).

Del Re, M.: Sugli spazi osculatori ad una superficie dello (h) -spazio. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 2, 53—57 (1932).

Synthetische Beschreibung der oskulierenden Räume einer Fläche längs einer Geraden g , die der Fläche angehört, im Falle, daß die Fläche eine endliche Anzahl anderer der Geraden g unendlich benachbarten Geraden enthält; und dual. Es gelten selbstverständlich ganz dieselben Eigenschaften wie für eine Regelfläche [s. P. Del Pezzo, Palermo Rend. 1, 241 (1887) und C. Segre, Encykl. d. math. Wiss. III C 7, ⁴¹⁰].

E. G. Togliatti (Genova).

Cartan, Élie: Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 11, 17—90 (1932).

D'après les Géomètres italiens (F. Severi, B. Segre), on appelle pseudo-conformes les transformations (formant un groupe infini) de l'espace à 4 dimensions de deux variables complexes x, y , qui se représentent au moyen d'une substitution analytique sur ces variables. Tandis que, par une transformation pseudo-conforme, toute surface est réductible soit à la surface caractéristique $y = 0$ (locution de T. Levi-Civita), soit à la surface lieu des points pour lesquels x et y sont réels, les hypersurfaces admettent, comme l'a montré H. Poincaré [Rend. Circ. mat. Palermo 23, 185 (1907)], une infinité d'invariants différentiels pseudo-conformes; font seulement exception les lieux à un paramètre de surfaces caractéristiques — que, avec B. Almer [Ark. Mat. Astron. Fys. 17, 7 (1922)], on appelle hyperplanoïdes — lesquels sont tous entre eux équivalents. — Récemment B. Segre [Rend. Semin. mat. Roma (2) 7, parte II, 59 (1931)] a introduit d'une manière intrinsèque, pour chaque hypersurface (analytique et réelle) qui ne soit pas un hyperplanoïde, deux systèmes de lignes imaginaires — nommées bicaractéristiques — et en outre [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. (6) 13, 676 (1931)] une équation différentielle ordinaire du second ordre: le problème de Poincaré, de reconnaître si deux surfaces sont équivalentes au point de vue pseudo-conforme, est réduit avec ça à constater si les équations différentielles associées sont réductibles l'une à l'autre par une transformation analytique ponctuelle (ce qu'on sait faire, d'après A. Tresse). Il faut néanmoins remarquer que ce résultat n'épuise pas la question, puisqu'il n'y a pas une équi-

valence parfaite entre les deux problèmes. — Dans cet important Mémoire, M. E. Cartan reprend le problème de Poincaré directement, comme application de sa méthode générale d'équivalence, et il parvient à le résoudre d'une façon complète. Le travail comprend cinq Chapitres, dont les deux derniers (consacrés à l'étude géométrique des hypersurfaces au point de vue pseudo-conforme et à leur conception comme espaces à connexion hypersphérique) paraîtront dans un autre Recueil. — Le Chapitre I expose rapidement les résultats classiques relatifs à la classification des surfaces, et les propriétés fondamentales des hyperplanoïdes. Il introduit les lignes bicaractéristiques d'une hypersurface, avec le nom de surfaces caractéristiques associées à celle-ci, en se plaçant à un point de vue un peu différent de B. Segre [l. c.]. Enfin il démontre que, si la congruence formée par ces surfaces admet un groupe G de transformations pseudo-conformes à r paramètres complexes, l'hypersurface admet exactement un sous-groupe à r paramètres réels de G . — Le Chapitre II a pour but de déterminer les hypersurfaces autres que des hyperplanoïdes admettant un groupe pseudo-conforme G à trois ou plus paramètres réels, par une méthode directe, qui repose sur la considération de la transformation infinitésimale imaginaire de G qui laisse fixe un point de l'hypersurface. Le problème peut naturellement être posé soit localement, soit globalement; deux hypersurfaces peuvent admettre deux groupes localement semblables, sans être globalement équivalentes: si l'une d'elle (donnée) est simplement connexe, la recherche de l'autre est ramenée à un problème facile de la théorie des groupes. Les hypersurfaces sont enfin classées d'après la structure de leurs groupes. Si une hypersurface admet localement un groupe à plus de trois paramètres, elle admet localement un groupe à huit paramètres, et elle peut être globalement réduite à une forme canonique simple; on obtient de la sorte une classification des hypersurfaces indiquées, en 8 catégories différentes, qui admettent globalement un groupe qui peut être à 4, 5 ou 8 paramètres. On a de même 6 types canoniques d'hypersurface admettant un groupe pseudo-conforme à trois paramètres (nécessairement transitif). — Le Chapitre III traite le problème général de l'équivalence locale de deux hypersurfaces autres que des hyperplanoïdes. Si deux hypersurfaces non localement équivalentes à l'hypersphère sont localement équivalentes entre elles, il existe au plus deux transformations pseudo-conformes faisant passer de l'une à l'autre, et transformant un point donné de la première dans le point correspondant de la seconde. On peut attacher à une hypersurface donnée huit formes de Pfaff covariantes, et former — en se servant d'elles — les invariants fondamentaux (généralement en nombre de neuf) et les invariants dérivés; au moyen de ces invariants, on peut aisément reconnaître — au moins dans le cas générale — l'équivalence locale de deux hypersurfaces données. — Pour bien apprécier l'importance des questions traitées, même en faisant abstraction de leur signification géométrique, on doit avoir égard aux liens qui les unissent à la théorie des fonctions analytiques de deux variables complexes; si bien que, p. ex., plusieurs des hypersurfaces déterminées au Chapitre II, ont déjà été rencontrées dans les travaux récents sur cette théorie (ce Zbl. 3, 213 et 5, 19).

Beniamino Segre (Bologna).

Cartan, Élie: Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes. II. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 1, 333—354 (1932).

Cette deuxième partie du Mémoire contient deux Chapitres, et s'occupe spécialement des propriétés géométriques pseudo-conformes des hypersurfaces. — Le premier Chapitre (Chap. IV du Mémoire total) introduit, pour les hypersurfaces qui ne sont pas localement équivalentes à l'hypersphère, une métrique intrinsèque, les lignes principales et les lignes de courbure. La définition de ces lignes est analytique, et découle aisément de la considération des trois formes de Pfaff attachées d'une manière intrinsèque aux points de l'hypersurface (Chap. III); les lignes principales sont spécialement étudiées pour une catégorie étendue d'hypersurfaces admettant un groupe à 3 paramètres. — Le dernier Chapitre pose les fondements de la géométrie différentielle pseudo-conforme de l'hypersphère, considérée comme un espace à trois dimensions, en se basant sur la méthode générale du repère mobile; on doit particulièrement remarquer quelques propriétés des chaînes et des cercles, et leurs équations différentielles. Les résultats analytiques du Chapitre III permettent alors de regarder toute hypersurface qui n'est pas un hyperplanoïde comme un espace à connexion hypersphérique, ce qui donne le moyen d'étendre à ces hypersurfaces les notions de chaîne et de cercle — définies d'abord seulement pour l'hypersphère — et d'introduire leur courbure riemannienne; la connexion hypersphérique ainsi obtenue n'est pas la plus générale possible: elle est déterminée intrinsèquement par la donnée de l'hypersurface. Enfin il y a la détermination des hypersurfaces pour lesquelles les lignes principales sont des chaînes. *Beniamino Segre (Bologna).*

● **Bouligand, Georges: Introduction à la géométrie infinitésimale directe.** Avec une préface de E. Cartan. Paris: Vuibert 1932. VII, 229 S. Frs. 36.—

Das Buch bringt eine elementare Darstellung der „direkten Differentialgeometrie“, die der Verf. mit einigen Mitarbeitern (Durand, Rabaté, u. a.) in der letzten Zeit bearbeitet hat. Das Ziel ist, wenigstens die grundlegenden Sätze der Differentialgeometrie ohne Voraussetzungen, die das Problem unnötig einschränken, abzuleiten. (Es sei bloß an die Lebesguesche Fläche erinnert, die isometrisch auf die Ebene abbildbar ist, ohne geradlinig zu sein.) Es wird aber bewußt darauf verzichtet, die neuen topologischen Methoden zu verwenden: der Euklidische Raum, Geraden usw. werden als bekannt vorausgesetzt. Gebracht wird im wesentlichen bloß eine systematische Untersuchung der vom Verf. eingeführten Begriffe der Kontingens und der Paratingens. Die Paratingens einer Punktmenge in einem Punkte M ist die Gesamtheit der Grenzlagen aller Sekanten der Menge, wenn die beiden Endpunkte gegen M streben; die Kontingens dasselbe für Sekanten, bei denen ein Endpunkt mit M zusammenfällt. Diese Begriffe werden noch verallgemeinert, indem man einerseits statt Geraden Kreise, Ebenen oder Kugeln betrachtet, andererseits Paratingenten höherer Ordnung definiert. Kontingens und Paratingens sind invariant gegenüber differenzierbaren Transformationen mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante („topologisch im engeren Sinne“). Es werden Kriterien für Kurven und für die lokale Darstellbarkeit der Flächen durch Funktionen abgeleitet. (Z. B. ergibt sich aus der Abgeschlossenheit der Paratingens und aus dem Überdeckungssatz unmittelbar: ein ebenes Kontinuum, dessen Paratingens in keinem Punkte alle Geraden enthält, ist eine Kurve). Es folgen Anwendungen auf konvexe Flächen (vgl. dies. Zbl. 3, 222 u. 106); einfache Jordanbögen; Flächen mit stetiger Tangentialebene usw. Diese Ausführungen gipfeln in der Ableitung der Sätze von Meusnier und Euler. Es schließen sich Bemerkungen über rektifizierbare Kurven und die Inhaltstheorie an. — Das Buch setzt keine Vorkenntnisse voraus, und ist sehr leicht lesbar. Fast das ganze erste Drittel ist Vorbereitungen gewidmet: Anfangsgründe der Punktmengenlehre, Halbstetigkeit, Peanosche und Brouwersche Kurven u. dgl. m.

Willy Feller (Kiel).

Oseen, C. W.: Beiträge zur geometrischen Optik. III. Ark. Mat. Astron. Fys. 23 A, Nr 10, 1—49 (1932).

Gullstrand hatte die Krümmungslinien einer Fläche in der Umgebung eines Nabelpunktes untersucht und im Anschluß daran die wichtigsten Eigenschaften der Evolute in der Umgebung des dem Nabelpunkt zugeordneten Punktes angegeben [Nova Acta Soc. Sci. Uppsäl., Ser. III (1900) und Acta math. 29 (1904)]. Verf. stellt sich die Aufgabe, die Evolute in der Umgebung höherer Ordnung eines solchen Punktes zu untersuchen. — Zur Darstellung der Ausgangsfläche dient ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Nabelpunkt, dessen z -Achse die Flächennormale im Nabelpunkt ist und dessen x_1 - und x_2 -Achse Tangenten der Fläche im Nabelpunkt sind. Die Ausgangsfläche beginnt dann mit der Entwicklung:

$$z = \frac{1}{2} r(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{6} \sum_{i,k,l} k_{ikl} x_i x_k x_l + \dots$$

Jetzt werden die Koordinaten ξ_1 ; ξ_2 ; ζ der Evolute in ihrer Abhängigkeit von x_1 , x_2 entwickelt. Die Größe

$$D = \frac{1}{2} (k_{111} k_{122} + k_{112} k_{222} - k_{112}^2 - k_{122}^2)$$

führt zur Unterscheidung zweier Hauptfälle. Im ersten Hauptfall $D \neq 0$ wird nach Einführung neuer Parameter auf der Evolute gezeigt, daß die Evolute in erster Näherung durch ein Polynom 4. Grades in den Argumenten

$$\frac{\xi_1}{\left(\zeta - \frac{1}{r}\right)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\xi_2}{\left(\zeta - \frac{1}{r}\right)^2}$$

dargestellt werden kann. Die Singularitäten und einige Kurven der Fläche werden berechnet. Danach berechnet der Verf. eine zweite Nähungsfläche und diskutiert

ihre geometrischen Eigenschaften. Von diesen sei erwähnt, daß die Evolute auf einer Seite der Brennebene in zwei Schalen zerfällt, von denen eine trichterförmig mit einer Spitze im Brennpunkt endet. — In ähnlicher Weise wird der zweite Hauptfall, in dem $D=0$ ist, aber nicht alle k_{ikl} verschwinden, untersucht. Auch hier sind noch Sonderfälle zu unterscheiden. Stets wird die Gestalt der Evolute durch Berechnung zahlreicher Kurven diskutiert. Auf Einzelheiten der umfangreichen Rechnungen kann hier nicht eingegangen werden. Haack (Danzig).

Kaučý, Jos.: Sur les transformations asymptotiques d'une surface non développable en elle même dans l'espace projectif S_3 . Mém. Soc. Roy. sci. Bohême 1931, Nr 16, 1—35 (1932).

Sind zwei Flächen S_1, S_2 auf asymptotische Parameter u, v bezogen, so ist damit eine asymptotische (= asymp. Linien erhaltende) Verwandtschaft zwischen S_1 und S_2 definiert. Sind $(\beta_i du^3 + \gamma_i dv^3) : 2 du dv$ die projektiven linearen Elemente von S_1 und S_2 , so sind die Ausdrücke $r(u, v) = \beta_1 : \beta_2$, $s(u, v) = \gamma_1 : \gamma_2$ projektive Invarianten der Verwandtschaft, die eine einfache geometrische Bedeutung haben (s. Fubini-Čech, Introduction à la géom. proj. diff. des surfaces, S. 200—201). Die Verwandtschaft heißt von zweiter Art, falls r und s nicht konstant, aber auch nicht unabhängig sind; die Kurven, längs deren r und s konstant sind, heißen dann die Charakteristiken der Verwandtschaft [s. Čech, Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces. Rozprawy české Akademie 38, Nr 3 (1929)]. Ref. hat in dieser Arbeit die Frage nach allen nicht geradlinigen Flächen S gestellt, die eine stetige Gruppe G von asymptotischen Verwandtschaften zweiter Art in sich gestatten. G heißt von erster oder zweiter Gattung, je nachdem in G zwei Verwandtschaften mit verschiedenen Charakteristiken vorkommen oder nicht. Ref. hat alle Fälle, wo G von erster Gattung ist, bestimmt. In der vorliegenden Arbeit werden die mindestens zweigliedrigen G zweiter Gattung bestimmt. Es gibt 10 verschiedene Lösungen. Čech (Brno).

Hlavatý, V.: Encore sur les invariants projectifs différentiels d'une courbe dans l'espace projectif P_{n-1} ($n \geq 3$). Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 206—211 (1932).

Fortsetzung einer früheren Note des Verf. (vgl. dies. Zbl. 5, 261). Für die dort eingeführten Invarianten I_2, \dots, I_n wird hier ein Berechnungsverfahren angegeben. Dann wird für gerades n die Existenz einer Funktion L der I_2, \dots, I_n und deren Ableitungen nachgewiesen, so daß $L \neq 0$ ist, falls die Tangenten der Kurve in keinem festen Nullsystem enthalten sind. Čech (Brno).

Douglas, Jesse: One-sided minimal surfaces with a given boundary. Trans. Amer. Math. Soc. 34, 731—756 (1932).

Verf. zeigt, die Kenntnis der Methoden und Resultate seiner beiden früheren Hauptarbeiten über Minimalflächen voraussetzend (vgl. dies. Zbl. 1, 141 und 4, 154), die Existenz einer einseitigen, von einer vorgegebenen doppelpunktfreien Jordankurve Γ des 3- (allgemeiner sogar n -) dimensionalen Raumes begrenzten Minimalfläche in folgendem Sinne und unter folgenden Voraussetzungen: Sei C der Einheitskreis der komplexen Zahlenebene, C_q ein konzentrischer Kreis vom Radius q , $0 < q < 1$. Man betrachte eine umkehrbare stetige Abbildung von C auf Γ , in der also die Koordinaten x_i auf Γ stetige Funktionen $g_i(z)$ des Punktes von $|z| = 1$ werden; dieselbe Zuordnung $g_i\left(\frac{-q}{z}\right)$ bildet auch $C_q(|z| = q)$ auf Γ ab. Man bestimme nun im Ring zwischen C und C_q die eindeutig festgelegten Potentialfunktionen x_i , deren Randwerte auf C bzw. C_q die eben genannten sind. Nun gehen der Kreisring und die Randwerte durch die konforme Abbildung $z' = \frac{-q}{z}$ in sich über, Potentialfunktion bleibt Potentialfunktion; wegen der Eindeutigkeit besitzen also die obigen Potentialfunktionen in z und $-\frac{q}{z}$ dieselben Werte. Diese Potentiale geben somit eine eindeutige stetige Ab-

bildung des Kreisringes mit Identifikation von z und $\frac{-q}{z}$ für $q \leq |z| \leq 1$, welcher damit einem Möbiusschen Bande topologisch äquivalent wird; die von ihnen aufgespannte einseitige Fläche des n -dimensionalen Raumes besitzt einen Flächeninhalt, der nur mehr von der Abbildung $g_i(z)$, ($|z| = 1$) und der Zahl q abhängt. Sein Minimum liefert eine Fläche kleinsten Inhalts unter allen von Γ berandeten einseitigen Flächen, die eindeutige stetige Bilder von Möbiusbändern sind, und es existiert sicher 1. falls man durch Γ überhaupt eine einseitige Fläche (Möbiusband) legen kann, deren Flächeninhalt kleiner als derjenige der durch Γ berandeten zweiseitigen Minimalfläche M (kleinsten Inhalts, vom topologischen Typus der Kreisscheibe) ist, oder 2. falls die konforme Abbildung von M auf den Einheitskreis einen Verzweigungspunkt gerader Ordnung enthält. — Verf. benutzt als Beweismittel das Funktional $A(g_1, g_2; q)$ seiner Arbeit über zweifach zusammenhängende Minimalflächen, indem aber g_2 , d. h. hier die Abbildung des Kreises C_q auf Γ , mit g_1 , d. h. derjenigen von C auf Γ , in der obigen einfachen Beziehung steht, so daß das Funktional nur noch von dieser einen und q abhängt: $2A(g, q)$. Dessen Minimum wird aufgesucht; der Existenzschluß ist analog den früheren. Die Voraussetzung 1. schließt für das Minimum von $A(g, q)$ die Möglichkeit $q = 0$ aus, die einfach $\liminf A(g, q) = \liminf A(g)$ ergeben würde (vgl. die erste Douglassche Arbeit), — denn $A(g, 0)$ ist formal gleich $A(g)$. — Die Wirksamkeit der zweiten Voraussetzung erhellt aus der Entwicklung von $A(g, q) - A(g)$ in eine Potenzreihe in q , welche dann mit einer geraden Potenz von q und einem negativen Koeffizienten beginnt, wenn man für g die zu M (s. o.) führende Abbildung einsetzt; das bedeutet aber, daß $A(g, q)$ kleinerer Werte als $A(g)$ fähig ist, und somit auch sein Minimum von den von $A(g)$ verschieden. Die von Douglas konstruierten einseitigen Flächen haben demnach kleineren Flächeninhalt als die entsprechenden zweiseitigen, und er bemerkt, daß auch die Realisierung durch das bekannte Seifenhautexperiment leichter die einseitigen als die zweiseitigen liefert. *Hans Lewy.*

Pastori, Maria: Tensori emisimmetrici coniugati. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 216—220 (1932).

In einem n -dimensionalen Raume mit inhaltstreuer Übertragung läßt sich ein konstantes kovariantes (kontravariantes) n -Vektorfeld angeben, das jedem kontravarianten (kovarianten) p -Vektor einen kovarianten (kontravarianten) $(n - p)$ -Vektor zuordnet. [Siehe Schouten *Der Ricci-Kalkül*, Berlin: Julius Springer 1924, S. 32, Formel (50), und außerdem S. 42, Formel (95).] Das gilt um so mehr in einem Raume mit Riemannscher Übertragung. Die Autorin gibt die Formel an für diesen speziellen Fall und zieht daraus einige elementar-algebraischen Konsequenzen. *Hlavatý.*

Bortolotti, Enea: Calcolo assoluto rispetto a una forma differenziale quadratica specializzata. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 13, 19—25 (1931).

Eine quadratische Differentialform $\sum a_{ik} du_i du_k$ ($i, k = 1, \dots, n$) heißt q -fach absolut spezialisiert, wenn sie sich identisch durch $n - q$ Variable ausdrücken läßt. Es wird die formale Theorie solcher Formen entwickelt auf Grund der Vorstellung, daß es sich um das Linienelement einer $(n - q)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit handelt, die in überzähligen Koordinaten gegeben ist, so daß also ein Kontinuum von Koordinaten- n -Upeln einen einzigen Punkt bedeutet. Demgemäß werden in erster Linie solche Skalare, Vektoren und Tensoren betrachtet, die wirkliche Ortsfunktionen sind, die also in ihrer Abhängigkeit von den n Koordinaten entsprechend eingeschränkt sind. Dann läßt sich jedes n -Upel derartiger Koordinatenfunktionen als die kontravarianten Komponenten eines Vektorfeldes auffassen, und die Komponenten sind in jedem Punkt nur bestimmt bis auf die additiven Komponenten eines Vektors aus einer q -dimensionalen Mannigfaltigkeit, die geometrisch den Nullvektor in diesem Punkt bedeutet. Umgekehrt sind die kovarianten Komponenten eines Vektors nicht nur eindeutig bestimmt, sondern es sind nur solche n -Upel als kovariante Vektorkomponenten zulässig, die q homogenen linearen Relationen genügen. Diese und die entsprechend für Ten-

soren verallgemeinerten algebraischen Vorschriften ergeben sich ausschließlich daraus, daß die Matrix a_{ik} den Rang $n - q$ hat. Diese Bedingung allein genügt aber nicht dafür, daß die Form $\sum a_{ik} du_i du_k$ q -fach spezialisiert ist, vielmehr müssen in den a_{ik} noch gewisse Differentialgleichungen (Integrabilitätsbedingungen) erfüllt sein, die in früheren Arbeiten Riccis und des Verf. abgeleitet worden sind. Berücksichtigung dieser Relationen ergibt eine sinngemäße Definition der kovarianten Ableitung. Die dabei auftretenden Christoffelsymbole enthalten wieder eine additive Unbestimmtheit. — Diese Theorie wird so entwickelt, daß der Fall $q = 0$ mitberücksichtigt wird und ohne weiteres den üblichen Riccikalkül liefert. Cohn-Vossen (Köln).

Potron: Sur certaines transformations conformes dans un espace de Riemann. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 747—749 (1932).

Sei R ein Riemannscher Raum mit dem Linienelement $ds^2 = g_{ik} du_i du_k$, welcher eine Gruppe G von $\infty^{n(n+1)}$ isometrischen Transformationen gestattet; G_0 sei die Untergruppe von G , welche den Punkt A von G festläßt. Dann ist G die Gruppe der „Drehungen“ in R um A mit $\frac{1}{2}(n-1)n$ Parametern. — An Stelle der allgemeinen Parameter u_i denke man jetzt neue: x_1, \dots, x_n so eingeführt: Sei g irgendeine geodätische Linie durch A , die dort die Richtungsos. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ hat. Es sei x_1 der längs g gemessene Abstand und $x_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_1}$ ($\nu = 2, \dots, n$). Dann ist $ds^2 = dx_1^2 + d\sigma^2$ mit $d\sigma^2 = \sum_{i,k=2}^n h_{ik}(x_1, \dots, x_n) dx_i dx_k$. Als „Drehungsgruppe“ läßt G_0 die geodät. Kugeln $x_1 = \text{konst.}$ invariant, und da $d\sigma$ das Linienelement auf diesen ist, so folgt $d\sigma = R^2(x_1) d\sigma_1$, wo $d\sigma_1$ von x_1 nicht abhängt und $R(x) = x +$ Terme höherer Ordnung. — Sei jetzt

$F(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{R(\xi)}$. Durch die Gleichung $F(x'_1) = F(x_1) + t$ wird dann eine Funktion

$x' = f(x, t)$ definiert. Es zeigt sich, daß hierdurch eine eingliedrige Gruppe konformer Transformationen von R auf sich gegeben ist, welche mit allen Elementen aus G_0 vertauschbar sind, da bei allen diesen $x_1 = \text{konst.}$ festbleibt. Die inf. Tr. dieser konformen Gruppe ist, umgerechnet auf die alten Variablen u_i , gegeben durch $u = R(x_1) \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial u_i} = \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i}$; aus den vorangehenden Feststellungen folgt dann: $\xi_i = u_i +$ Terme höherer Ordnung. Schwerdtfeger (Göttingen).

Potron: Sur les espaces de Riemann admettant un groupe de transformations isométriques à $n(n+1)/2$ paramètres. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 850—852 (1932).

Unter den im vorangehenden Ref. formulierten Voraussetzungen über die Gruppe G des Raumes R wird ausgehend von den Killingschen Gleichungen das bekannte Resultat (L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry, S. 84 u. 239) bewiesen, daß R notwendig von konstanter Riemannscher Krümmung und die Gruppe G der Bewegungsgruppe des Raumes ähnlich sein muß. Hans Schwerdtfeger (Göttingen).

Elastizitätstheorie.

Volterra, E.: Elasticità vincolata e sua schematizzazione matematica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 220—222 (1932).

Der Verf. schlägt vor, brauchbare Näherungslösungen elastischer Probleme dadurch zu gewinnen, daß man allgemeine Annahmen über den Typus der Deformation macht (z. B. Ebenbleiben der senkrecht zur Stabachse gelegten Querschnitte bei der Biegung gerader Stäbe) und die in diesen Ansätzen auftretenden willkürlichen Funktionen (Verschiebungen und Drehungen der Querschnittsebenen im Falle des obigen Beispiels) mittels des Satzes vom variierten Formänderungszustand bestimmt. In der vorliegenden Mitteilung wird dieser Gedanke kurz dargestellt und die Beziehungen zu bekannten Methoden werden besprochen; eine weitere Mitteilung mit durchgeführten Beispielen wird angekündigt. Prager (Göttingen).

Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: Vibrations of a single-storied framed structure. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo **10**, 767—803 (1932).

The free and forced vibrations of a two-span portal frame are calculated in the usual exact manner. The latter result appears in a formula covering eight printed pages.

Den Hartog (Cambridge).

Lampariello, G.: Sull'equazione delle vibrazioni trasversali di un'asta elastica sollecitata agli estremi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **16**, 102—105 (1932).

The partial differential equation

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

and the end conditions $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 0$ for $x = 0$ and $x = a$ give

$$\int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = \int_0^a \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx.$$

When use is made of Almansi's inequality

$$\int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \leq \left(\frac{a}{2\pi} \right)^2 \int_0^a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

it is found that for $a^2 \leq 4\pi^2$ we have $\int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \leq 0$ and so $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ for $0 \leq x \leq a$

whatever x may be. Hence if u is zero for $t = 0$ it is zero for all greater values of t . — This result is applied to the initial motion of a longitudinally compressed beam built in at its two ends; the foregoing result indicates that the motion is determined uniquely by initial small displacements and velocities if the length is not greater than Euler's critical length.

H. Bateman (Pasadena).

Seljakow, N. J.: Mechanismus der Plastizität. Z. Kristallogr. A **83**, 426—447 (1932).

Wird der Vorgang der plastischen Gleitung im Einkristall mit Hilfe von Röntgenstrahlen mittels der Laueschen Methode untersucht, so stellt man Asterismus fest im Röntgenbild. Betrachtet man Steinsalz mit der Fläche {110} als Schubfläche und eine Schubrichtung vom Typ [110], so wird dargelegt, daß in den plastisch verformten Gleitschichten die kubische Symmetrie in monokline übergehen muß, was auch durch beigegebene Laue-Aufnahmen bestätigt wird. — Bei Biegegleitung wird ein der Fläche (010) entsprechender Punkt des Röntgenbildes zu einem Strich auseinandergezogen; es werden auf Grund der Navierschen Biegungstheorie die Längen jener Striche in stereographischer Projektion bestimmt, was sich durch eine kurze Rechnung aus Beziehungen ergibt, die von Konobejewski und Mirer [Z. Kristallogr. A **81**, 69 bis 91 (1932)] angegeben wurden. 2 Tabellen dienen zur Feststellung der Übereinstimmung von Rechnung und Versuch. Kurz wird hingewiesen auf die Konsequenzen der entwickelten Vorstellungen für den Austenitzerfall bei Kaltreckung sowie die Verwaschenheit der Martensitlinien im gehärteten Stahl. — Über die Vermutung, die durch neuere Arbeiten auf dem Gebiet der Kontinuumsmechanik nahegelegt ist, ob die plastische Gleitung sprungweise erfolgt, ist auch in dieser Arbeit wie in den meisten bis jetzt bekannten kristallgittertheoretischen Untersuchungen leider nichts ausgesagt.

Schlechtweg (Göttingen).

Quantentheorie.

Haas, Arthur: Wirkungsquantum und kosmische Konstanten. Naturwiss. **1932**, 906.

● **Darrow, Karl K., und E. Rabinowitsch:** Elementare Einführung in die Wellenmechanik. Mit einem Vorwort v. E. Schrödinger. 2. Aufl. (Neue Probleme d. Physik

u. Chem. Hrsg. v. Eugen Rabinowitsch. Bd. 2.) Leipzig: S. Hirzel 1932. VIII, 110 S. u. 4 Abb. RM. 5.—.

Die Tatsache, daß eine zweite Auflage dieses Büchleins notwendig geworden ist, spiegelt genugsam das starke Bedürfnis eines breiten Leserkreises nach solch kurzgefaßten, mathematisch elementaren, lebendig geschriebenen Darstellungen der neueren Quantentheorie wieder, das trotz der zahlreichen Neuerscheinungen der letzten Zeit noch immer nicht abgesättigt ist. Ihr unbestreitbarer Vorzug ist die Unbeschwertheit, mit der sie den Leser für die Idee gewinnen, ihr unvermeidbarer Nachteil trotz aller Sorgfalt, die auf korrekte Darstellung gelegt ist, das leichte Hinweggleiten über Fragen, die bei gründlichem Nachdenken wesentlich werden, für deren Erörterung aber der Raum und manchmal die formalen Hilfsmittel fehlen. Nimmt man hinzu, daß K. K. Darrow ein großes Geschick hat, den Leser im Plauderton in physikalische Begriffsbildungen einzuführen und dasselbe bei der Schilderung der allgemeinen Wellenmechanik und der Eigenschwingungsprobleme aufs beste bewährt, daß andererseits sein Entwurf des Hauptteils aus einer Zeit stammt, in welcher die Deutungsfragen noch nicht bis zu der heute erreichten Klärung gediehen waren, so sind Licht- und Schattenseiten der Schrift schon weitgehend angedeutet. Herr E. Rabinowitsch zeichnet als Mitverfasser der zweiten Auflage, weil die aus seiner Feder stammende kurze Schilderung der statistischen Deutung der Wellen, sowie die Anwendungen der Wellenmechanik auf Mehrelektronenatome, Valenzfragen und auf den α -Zerfall der Kerne den Umfang des Büchleins um ein Drittel erweitert und seinen Inhalt wesentlich bereichert haben. *Fues (Hannover).*

Jordan, P.: Die Quantenmechanik und die Grundprobleme der Biologie und Psychologie. Naturwiss. 1932, 815—821.

Der Indeterminismus des Mikrogeschehens wird dargelegt (Unschärferelation). — In der Psychologie wird durch Selbstbeobachtung der beobachtete psychische Ablauf unkontrollierbar abgeändert. Die Verhältnisse liegen somit ähnlich wie beim Gamma-Strahlen-Mikroskop. Auch durch jede physiologische Feinbestimmung eines Hirnzustandes wird unvermeidlich das Hirn getötet. Es sei daher analog zur Quantenphysik prinzipiell unmöglich, das Verhalten eines lebenden Hirns zu prognostizieren (Willensfreiheit). Jeder lebende Organismus gleiche einer physikalischen Verstärkeranordnung. Die makroskopischen Reaktionen würden nämlich durch Mikrovorgänge „gesteuert“ (Lichtreize, Zellkernprozesse, Chromosomenvorgänge), die in der Größenordnung des Einzelatoms und Einzelquants gelegen seien und daher akausal abließen. Auch das Makroverhalten des Organismus sei folglich unprognostizierbar. „Eine deterministische Auffassung der Lebensvorgänge ist mit den Ergebnissen der Naturwissenschaft nicht in Einklang zu bringen.“ *E. Zilsel (Wien).*

McVittie, G. C.: Dirac's equation in general relativity. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 92, 868—877 (1932).

Verf. stellt sich die Aufgabe, die Lichtemission der Atome in Gravitationsfeldern zu untersuchen. Er benutzt die von H. Weyl [Z. Physik 56, 330 (1929)] und V. Fock [ebenda 57, 261 (1929)] gegebene allgemeinrelativistische Theorie des Diracschen Elektrons. (Diese Theorie wird übrigens vom Verf. als Schrödingersche Theorie bezeichnet, und die Arbeiten von H. Weyl und V. Fock werden nicht erwähnt). Nach einer Einleitung (I) gibt Verf. in II eine Zusammenstellung der wichtigsten Formeln der Theorie. In III werden die bereits von V. Fock [l. c. Formel (38)] gefundenen Formeln für die Diracsche Wellengleichung in orthogonalen Koordinaten abgeleitet. In IV werden die Rechnungen von Darwin für das Wasserstoffatom wiederholt. Als Resultat ergibt sich a) die bekannte Rotverschiebung, sowie b) die Unabhängigkeit der Lichtfrequenz von der evtl. Änderung des Weltradius. *V. Fock (Leningrad).*

Bargmann, V.: Bemerkungen zur allgemein-relativistischen Fassung der Quantentheorie. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 24, 346—354 (1932).

Einige Bemerkungen und unwesentliche formale Verallgemeinerungen zu der von Weyl und Fock gegebenen allgemein-relativistischen Theorie des Diracschen Elektrons in ihrer Schrödingerschen (vgl. dies. Zbl. 4, 281) Formulierung. *V. Fock.*

Maiorana, E.: Reazione pseudopolare fra atomi di idrogeno. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 13, 58—61 (1931).

Theoretische Untersuchung der Frage, ob die von Weizel [Z. Physik 65, 456 (1930)] gegebene Deutung eines neuen Terms im H_2 -Spektrum richtig sein kann. Es handelt sich um einen Term, der einer Anregung der beiden Elektronen entsprechen würde. Verf. betrachtet die zugehörige Wellenfunktion als Linearkombination zwischen dem System $H-H$ (homöopolares Molekül) und H^+-H^- (polares Molekül). Die

Rechnung zeigt, daß es theoretisch einen Term, der einer Anregung zweier Elektronen zugehört, in ungefähr der erwarteten Lage und von der erwünschten Art gibt.

Bechert (München).

Ochiai, Kiichirô: Energy of the configuration $(1s)^2(2s)$. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 14, 388—396 (1932).

Verf. wendet die von Fock für das quantenmechanische Mehrkörperproblem aufgestellten Gleichungen auf den Fall des Lithiumatoms im Grundzustande, sowie auf einige verwandte Probleme an. Unter Vernachlässigung kleiner Glieder reduziert Verf. die Lösung der Fock'schen Gleichungen auf ein Problem der Störungstheorie, wobei als ungestörtes Problem ein geeignet gewähltes exakt lösbares (wasserstoffartiges) System von Differentialgleichungen betrachtet wird. Zunächst werden zwei verfügbare Parameter α und β eingeführt, dann werden die Gleichungen auf den Fall $\alpha = \beta$ spezialisiert, schließlich wird auch über α derart verfügt, daß gewöhnliche Wasserstoffeigenfunktionen entstehen. Es erweist sich, daß sogar in dieser ganz groben Näherung eine ziemlich befriedigende Übereinstimmung mit den experimentellen Energiewerten stattfindet.

V. Fock (Leningrad).

Smith, Lloyd P.: Calculation of the quantum defect for highly excited S states of para-and orthohelium. Physic. Rev., II. s. 42, 176—181 (1932).

Die Rechenmethode folgt den Grundgedanken des Verfahrens von Fock [Z. Physik 61, 126 (1930)]. Die Wellenfunktion wird als Linearkombination in der üblichen Form angesetzt: $\Psi = \psi_1(x_1) \psi_2(x_2) \pm \psi_1(x_2) \psi_2(x_1)$; die Argumente x_1, x_2 bedeuten die Koordinaten des ersten bzw. zweiten Elektrons. Dieser Ansatz wird in das Fock'sche Variationsproblem eingeführt. Man erhält dann zwei simultane Differentialgleichungen für ψ_1, ψ_2 , die Verf. ohne die speziellen Annahmen löst, die Hylleraas [Z. Physik 66, 453 (1930)] über das auf die Elektronen wirkende Feld gemacht hatte. Hier handelt es sich um den Fall, daß das zweite Elektron in einer hoch angeregten S-Bahn läuft. Dann ist die Energie des zweiten Elektrons praktisch Null und man kann die Gesamtenergie in nullter Näherung gleich der des ersten Elektrons setzen, für das als Wellenfunktion der Grundzustand von He^+ eingesetzt wird. Die Differentialgleichung des zweiten Elektrons in dieser Näherung wird für kleine Kernabstände r numerisch gelöst. Für größere r bekommt man Besselfunktionen als Lösung. Andererseits kann man die Gleichung des zweiten Elektrons für große r nach der Wentzel-Kramers-Brillouin-Methode behandeln, auch wenn man die Energie $\varepsilon = -\frac{1}{2(n-\Delta)^2}$ dieses Elektrons als kleines Korrektionsglied beibehält. (ε in atomaren Einheiten gemessen, n = Hauptquantenzahl des zweiten Elektrons, Δ ist der zu berechnende Quanten-defekt). Diese Lösung enthält Δ als Phasenkonstante. Sie muß aber für große n phasengleich mit der vorhin angegebenen Lösung sein. Das liefert die Bestimmung von Δ , nämlich $\Delta = 0,289$ für Orthohelium, $\Delta = 0,160$ für Parhelium. Experimentell gilt $\Delta = 0,298$ und $0,140$.

K. Bechert (München).

Coolidge, Albert Sprague: A quantum mechanics treatment of the water molecule. Physic. Rev., II. s. 42, 189—209 (1932).

In Fortsetzung einer Untersuchung von Slater behandelt Verf. das Molekül H_2O nach der Methode von Heitler und London. Um die Rechnung nicht zu langwierig zu machen, wird vorausgesetzt, daß sich die H-Kerne in gleichen Abständen von $1,07 \text{ \AA}$ vom O-Kern befinden. Der Abstand der H-Kerne wird nun variiert, um festzustellen, für welchen Winkel das Molekül am stabilsten ist. Für die Wellenfunktionen werden lineare Kombinationen der Slaterschen Wellenfunktionen benutzt, wobei zur Vereinfachung des Problems die K-Elektronen des O-Atoms in den Kern aufgenommen sind, so daß dies Atom durch ein Gebilde mit Kernladung 6 und 6 Elektronen in der L-Schale ersetzt wird. In der stabilsten Lage bilden die Verbindungslinien der H-Kerne mit dem O-Kern einen Winkel von etwa 97° . Die Bindungsenergie ergibt sich wesentlich kleiner als der experimentelle Wert. Am Schlusse der Arbeit

findet sich eine Zusammenstellung von Integralen, die bei Untersuchungen über dreiatomige Moleküle von Nutzen sein dürften. *R. de L. Kronig* (Groningen).

Fowler, R. H., and T. E. Sterne: Statistical mechanics with particular reference to the vapor pressures and entropies of crystals. *Rev. Modern Physics* **4**, 635—722 (1932).

Die Berechnung der Dampfdruckkonstanten („chem. Konstanten“) aus dem Molekülmodell beruht auf der statistischen Behandlung des Sublimationsgleichgewichtes. Die Komplexionen dieser Gesamtheit sind bei gegebener Gesamtenergie und -maße durch die Energie der Gasphase und die Anzahl der in ihr enthaltenen Moleküle unterschieden. Wenn man die Gewichte der Komplexionen kennt, kann man den Mittelwert der in der Gasphase vorhandenen Moleküle berechnen, der seinerseits mit den Partitionsfunktionen des festen und gasförmigen Zustandes in einfacher Beziehung steht und daher mit beobachtbaren thermischen Größen in Zusammenhang gebracht werden kann. Bei der Anwendung dieses Gedankenganges auf zweiatomige Moleküle müssen die Einflüsse von Kernspin, des Auftretens von ortho- und para-Zuständen und verschiedener Isotoper berücksichtigt werden. Dies ist nur mit Hilfe der Quantenmechanik möglich; deswegen muß die bereits vom Standpunkte der älteren Quantentheorie entwickelte statistische Rechnung im Sinne der Quantenmechanik ergänzt werden; dies wird in der vorliegenden Arbeit in allgemein gültigem Umfang durchgeführt. Die wichtigsten Ergänzungen betreffen die Bildung der statistischen Mittelwerte und die Aufstellung der Partitionsfunktionen von Kristallen. — Die statistischen Mittelwerte werden durch Mittelung über alle zugänglichen Zustände scharfer Energie erhalten, wobei das Gewicht jedes Zustandes gleich der Anzahl der linear-unabhängigen Wellenfunktionen gesetzt wird, die ihn beschreiben. Als zugänglich wird ein Zustand dann bezeichnet, wenn die Möglichkeit besteht, daß das System, von einem bekannten Anfangszustande ausgehend, ihn zu einem späteren Zeitpunkte erreicht. Da die Symmetrieeigenschaften der Wellenfunktionen dauernd erhalten bleiben, gelten nur Zustände mit gleicher Symmetrie wie der Anfangszustand als zugänglich. Nach dem Pauli-Prinzip müssen also die Wellenfunktionen der zugänglichen Zustände in allen Protonen und Elektronen antisymmetrisch sein. Um nicht in Gesamtheiten, die aus neutralen Atomen oder Molekülen bestehen, auf die Bausteine des Atoms zurückgreifen zu müssen, ist es notwendig, die Symmetrieeigenschaften der Wellenfunktionen in bezug auf die Permutation der Moleküle, überhaupt derjenigen „komplexen Systeme“ auszudrücken, die bei den Veränderungen des Mikrozustandes erhalten bleiben. Wenn ein solches „komplexes System“ n Protonen und n Elektronen enthält, muß nach dem Pauli-Prinzip die Wellenfunktion bei geraden $(n + m)$ symmetrisch, bei ungeraden $(n + m)$ antisymmetrisch sein. Es gilt nun der Satz, daß man alle diejenigen linear unabhängigen Wellenfunktionen aufstellen muß, um die richtige Anzahl von zugänglichen Zuständen zu erhalten, die den obengenannten Symmetrieeigenschaften in den „komplexen Systemen“ genügen. — Die Partitionsfunktion der Eigen-

schwingungen des Kristalls werden in der Form $\left[K \left(e^{-\frac{1}{kT}} \right) \right]$ angesetzt; der Ansatz läßt sich auf Grund gittertheoretischer Überlegungen begründen. Für die Partitionsfunktion der Rotationsbewegung von Molekülen im Kristall wird auf die Untersuchung von Sterne [*Proc. Roy. Soc. A* **130**, 551 (1930)] zurückgegriffen. Die Berechnung der Partitionsfunktion des Kristalls $H(V, T)$ aus thermischen Daten erfolgt nach der Gleichung:

$$k \log \frac{H[V(T), T]}{H[V(0), 0]} = \int_0^T \frac{dT'}{T'^2} \int_0^{T'} C_p dT'' + \frac{1}{T} \int_0^T p(T') V(T') dT',$$

die aus allgemeinen statistischen Sätzen abgeleitet wird. — Auf dieser Grundlage lassen sich die Dampfdruckkonstanten der zweiatomigen Moleküle ohne weitere Hypothesen berechnen. Der am häufigsten vorkommende Sonderfall betrifft ein System aus mehreren Molekülen, die einen Mischkristall mit vollkommener Mischbarkeit bilden in einem Temperaturbereich, an dessen unterer Grenze der Rotationsanteil der spezifischen Wärme bei konstantem Druck gleich $\frac{1}{2} \cdot R$ ist. Die Dampfdruckkonstante des Partialdruckes der r -ten Molekülarart ist

$$i_r = \log [(2\pi m_r)^{3/2} k^{7/2} 8\pi^2 I_r / h^3] + \log [G_r / \omega_0].$$

Hierin ist I_r das Trägheitsmoment, ω_0 die Zahl der Eigenfunktionen des Moleküls im Kristall bei niedrigster Energiestufe, G_r ein Zahlenfaktor, der aus der Elektronenkonfiguration im niedrigsten Zustande berechenbar ist. — Die Arbeit ist als zusammenfassender Bericht geschrieben und enthält sowohl eine ausführliche Beschreibung aller Schritte der Rechnung als auch zahlreiche Anwendungen der Theorie. *Eisenschitz* (Berlin).

Kronig, R. de L., and H. J. Groenewold: On the Lorentz-Lorenz correction in metallic conductors. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* **35**, 974—978 (1932).

Verff. diskutieren die Frage, welche von den Formeln

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = 4\pi N\alpha \quad (1) \quad \text{oder} \quad n^2 - 1 = 4\pi N\alpha \quad (2)$$

mit $\alpha = \frac{e^2}{4\pi^2 m(\nu_0^2 - \nu^2)}$ (e Ladung, m Masse des Elektrons, ν_0 Eigenfrequenz des Oszillators, ν Lichtfrequenz), die den Brechungsindex n mit der Anzahl N der Atome pro Volumeinheit verbinden, im Fall metallischer Leiter anzuwenden ist. [Im Fall des Dielektrikums gilt bekanntlich die Clausius-Mossottische Gl. (1).] — Verff. bedienen sich der folgenden Modelle. Modell *A*: Im Metall sei die positive Ladung gleichförmig verteilt, während die Elektronen ein kubisches Gitter bilden (also z. B. in Zentren der kubischen Zellen von der Kantenlänge a befindlich sind). Nimmt man an, daß diese Zellen zusammenschrumpfen (Kantenlänge $b < a$), so daß zwischen ihnen leere Zwischenräume entstehen, während die gesamte Ladung erhalten bleibt, so geht man zu einem Modell *B* über, für welches die Betrachtungen von Lorentz-Lorenz anwendbar sind. Es läßt sich für *B* eine Eigenfrequenz ν_0 bestimmen. Nun läßt es sich zeigen (und das ist das eigentliche Resultat der Arbeit), daß die Anwendung der Formel (1) auf das Modell *B* für $b = a$ dasselbe Resultat ergibt, wie die Anwendung von (2) auf freie Elektronen im Modell *A* ($\nu_0 = 0$). Die richtige Formel für Metalle ist daher $n^2 - 1 = 4\pi N\beta$ (3) mit $\beta = \frac{-e^2}{4\pi^2 m\nu^2}$. *V. Fock* (Leningrad).

Akulov, N., und E. Kondorsky: Über einen magnetomechanischen Effekt. *Z. Physik* 78, 801–807 (1932).

Die Verteilung der Magnetisierungsrichtungen in einem durch eine äußere Kraft deformierten und in einem beliebigen Magnetfeld befindlichen Einkristall wird mit einer von Heisenberg angegebenen Methode berechnet. Dabei entsteht auch dann eine Ummagnetisierung durch Zug, wenn das äußere Feld vorhanden ist (so daß die resultierende Magnetisierung verschwindet). In diesem Fall bekommt man also eine Änderung der Elastizitätskonstanten, die von der Stärke der Zugkraft und (wegen der Größe der spontanen Magnetisierung) von der Temperatur abhängig ist. *R. Peierls*.

Gans, Richard: Über das magnetische Verhalten isotroper Ferromagnetika. *Ann. Physik*, V. F. 15, 28–44 (1932).

Der Verlauf der Magnetisierungskurve in einem Einkristall kann (bei gegebener Symmetrie) durch zwei Parameter beschrieben werden. Diese Parameter waren früher durch Vergleich mit dem Experiment für Eisen, Nickel und Kobalt bestimmt worden. Mit ihrer Hilfe ist es nun auch möglich, die Magnetisierungskurven von polykristallinem Material zu berechnen. Hierbei wird der erste Anfang der Magnetisierung vernachlässigt, d. h. die Tatsache, daß die Richtungen der Magnetisierung aller Elementargebiete zunächst noch nicht die Richtungen leichtester Magnetisierung verlassen, sondern nur unter diesen diejenigen bevorzugen, die günstiger zur Feldrichtung liegen. Die Rechnungen gelten also für nicht zu schwache Felder. Für diese Felder bekommt man sehr gute Übereinstimmung mit dem Experiment in den Fällen von Eisen und Nickel, während bei Kobalt die experimentellen Kurven untereinander zu große Verschiedenheiten zeigen, um einen Vergleich zu ermöglichen. *R. Peierls* (Rom).

Didlauskis, M.: Zur Wanderungsgeschwindigkeit von Elektronen. *Z. Physik* 77, 352–355 (1932).

Verf. berechnet die Wanderungsgeschwindigkeit von Elektronen im homogenen elektrischen Felde auch für den Fall ungleichförmiger Wahrscheinlichkeitsverteilung der Streurichtungen bei Zusammenstößen, bei Vorkommen von unelastischen Stößen und geschwindigkeitsabhängiger freier Weglänge, vernachlässigt jedoch die Wechselwirkung der Elektronen untereinander. In der erhaltenen Gl. sind die von Langevin-Townsend und von Lenard (Maxwellsche Verteilung) als Spezialfälle enthalten. Schließlich wird versucht, die mittels der Townsend-Methode erhaltenen Vielfachstoß-Querschnitte aus den mittels der Ramsauer-Methode gemessenen Einzelstoß-Querschnitten und der Winkelverteilung unter Zugrundelegung einer vom Verf. (vgl. dies. Zbl. 4, 182) angegebenen Geschwindigkeitsverteilung der im elektrischen Feld diffundierenden Elektronen (die von der Maxwellschen und der von Druyvesteyn [*Physica* 10, 61 (1930)] angegebenen Verteilung etwas abweicht) zu berechnen. *Guth*.

Klassische Theorie der Elektrizität.

Karapetoff, Vladimir: A general theory of systems of electric and magnetic units. Trans. Amer. Inst. Electr. Engr. **51**, 715—727 (1932).

Weber, Ernst: A proposal to abolish the absolute electrical unit systems. Trans. Amer. Inst. Electr. Engr. **51**, 728—742 (1932).

Campbell, George A.: Three superfluous systems of electromagnetic units. Physics **3**, 230—239 (1932).

Karpen, N. Vasilescu: Sur les forces électromagnétiques. Tension et répulsion des lignes de force. Energie du champ magnétique. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **3**, 121—124 (1932).

Viney, Irene E.: Generalizations of Maxwell's theory. Philos. Mag., VII. s. **14**, 961—976 (1932).

Kritische Bemerkungen zu neuen Versuchen von R. Ferrier und A. Proca, die Maxwell'schen Gleichungen zu verallgemeinern. Ferrier nimmt zu dem Maxwell'schen Gesamtstrom noch einen Term $\text{grad } E_0$ hinzu und zur Ladungsdichte den Term $-\frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial t}$.

Wenn aber E_0 nicht überall konstant sein soll, so muß man aus den Ferrierschen Gleichungen schließen, daß der Satz von der Erhaltung der Ladung (Kontinuitätsgleichung) nicht mehr gilt. Und aus dem Spannungstensor folgt, daß die Geschwindigkeit der Ladungen in dieser Theorie gleich der Lichtgeschwindigkeit wird. A. Proca setzt zwei neue Funktionen E_0, B_0 in die Feldgleichungen ein und nimmt zu den elektromagnetischen Potentialen zwei neue Potentiale L_0, \vec{L} hinzu. Eine vernünftige physikalische Deutung für diese Größen fehlt bis jetzt. Auch in dieser Theorie gilt die Erhaltung der Ladung nicht. Verf. schlägt eine noch allgemeinere Form der Feldgleichungen vor, in der die neu eintretenden Größen mit der Gravitation in Verbindung gebracht werden sollen. Eine endgültige Formulierung fehlt. *Bechert* (München).

Debye, P.: Zerstreuung von Licht durch Schallwellen. Physik. Z. **33**, 849—856 (1932).

Verf. gibt eine Theorie der Zerstreuung des Lichtes durch Schallwellen von einer bestimmten Frequenz. Der Theorie liegt die folgende Vorstellung zugrunde. Die Schallwellen verursachen eine periodische Änderung der Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$, wo ε_1 in Form einer ebenen Welle mit kleiner Amplitude angesetzt wird. Entsprechend wird für das Feld $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_1$; $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}_1$ gesetzt, wo $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{H}_0$ die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen für $\varepsilon = \varepsilon_0$ (primäre Welle) und $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{H}_1$ die durch ε_1 verursachte Störung (gestreute Welle) ist. — Im folgenden wird der Effekt erster Ordnung (in ε_1) durchgerechnet, welcher zwar die wesentlichen, nicht aber die feineren Züge der Erscheinung wiedergibt. Es erweist sich als wesentlich, die Endlichkeit des vom Träger der Schallwellen (Flüssigkeit) eingenommenen Volumens zu berücksichtigen. Die Frequenzen der Schall- und Lichtwelle seien Ω bzw. ω , die Wellenlängen A bzw. λ . Die Beobachtungsrichtung der gestreuten Lichtwelle bilde mit der Richtung der primären Welle einen Winkel ϑ . Dann ist die Frequenz der gestreuten Lichtwelle gleich $\omega \pm \Omega$; die Amplitude hat ein einziges Maximum, wenn $\sin \vartheta = \frac{\lambda}{A}$ (für $\omega + \Omega$) oder $\sin \vartheta = -\frac{\lambda}{A}$ (für $\omega - \Omega$) wird. Die Berücksichtigung des Effektes zweiter, dritter usw. Ordnung würde zu Streuwerten mit den Frequenzen $\omega \pm 2\Omega, \omega \pm 3\Omega$ führen, wobei auch weitere Interferenzmaxima zu erwarten sind. Die optische Störung erweist sich als unerwartet groß. — Die Darstellung und Diskussion der Theorie wird in engem Anschluß an die zum Teil vom Verf. ermittelten experimentellen Ergebnisse ($A \sim 0,1 \text{ mm}$) durchgeführt.

V. Fock (Leningrad).